Prova di Matematica esame di stato 2016

Francesco Bragadin

francesco.bragadin@whymatematica.com

Sommario

Ritengo che per cercare di ottenere un buon risultato sia indispensabile un'analisi molto accurata della prova stessa.

Nel caso particolare cercherò di declinare il più possibile ogni quesito con i riferimenti teorici indispensabili.

Non è quindi un semplice sviluppo degli esercizi ma un'approfondita analisi di tutta la prova per capire cosa si deve approfondire per una preparazione veramente completa.

Indice

1 Problema 1 **2**
1.1 Sviluppo . . . 4
1.2 Prerequisiti . . . 15

2 Problema 2 **16**
2.1 Sviluppo . . . 17
2.2 Prerequisiti . . . 27

3 Quesito 1 **27**
3.1 Sviluppo . . . 28
3.2 Prerequisiti . . . 29

4 Quesito 2 **30**
4.1 Sviluppo . . . 30
4.2 Prerequisiti . . . 31

5 Quesito 3 **31**
5.1 Sviluppo 31
5.2 Prerequisiti 32

6 Quesito 4 **33**
6.1 Sviluppo 33
6.2 Prerequisiti 34

7 Quesito 5 **34**
7.1 Sviluppo 34
7.2 Prerequisiti 35

8 Quesito 6 **35**
8.1 Sviluppo 35
8.2 Prerequisiti 36

9 Quesito 7 **36**
9.1 Sviluppo 36
9.2 Prerequisiti 37

10 Quesito 8 **37**
10.1 Sviluppo 38
10.2 Prerequisiti 38

11 Quesito 9 **39**
11.1 Sviluppo 39
11.2 Prerequisiti 40

12 Quesito 10 **40**
12.1 Sviluppo 40
12.2 Prerequisiti 41

1 Problema 1

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio d riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettarne uno che corrisponda alle esigenze del condominio.

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno di figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a 8m;

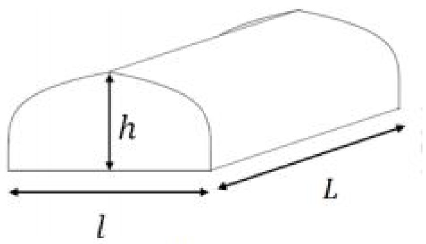


Figura 1: vista prospettica

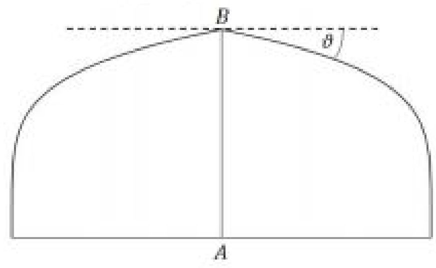


Figura 2: vista laterale

- la larghezza l de serbatoio deve essere a 2m;
- l'altezza h del serbatoio deve essere pari a 1m;
- di profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\vartheta \geq 10^0$;
- la capacità del serbatoio deve essere pari ad **almeno** $13m^3$, in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;
- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza del gasolio.

1. considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1, 1]$, k **intero positivo**, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}} \quad (1)$$

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1 \quad (2)$$

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right) \quad (3)$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ e al volume del serbatoio.

3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

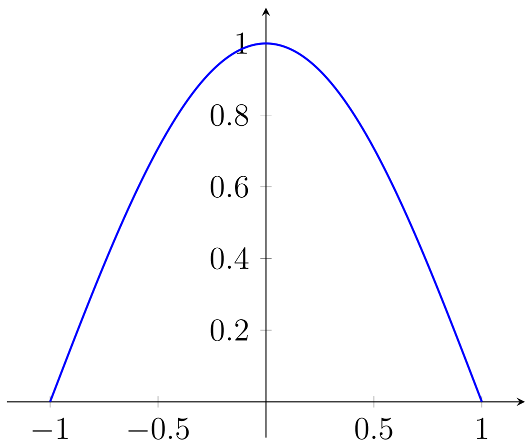
Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto 1m, il valore z del livello di gasolio, espresso in cm, deve corrispondere alla percentuale di riempimento cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%, invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50cm, una percentuale 59,7%.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

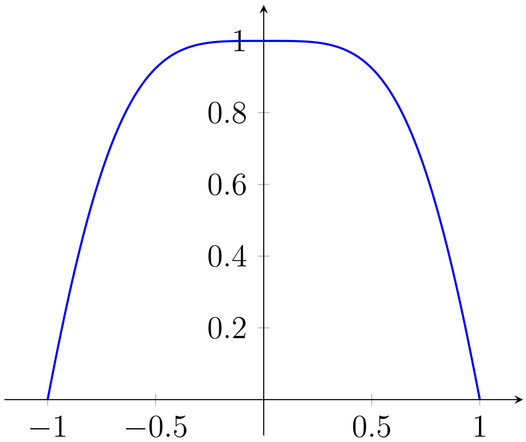
1.1 Sviluppo

1. La figura 2 rappresenta esattamente il grafico o 1 o 2 o 3. Si nota immediatamente che non può essere la 3 in quanto è l'unica delle tre che è derivabile in ogni punto mentre la figura 1 evidenzia proprio un punto di non derivabilità che è il punto di cuspide o il punto di unione del tetto del serbatoio.

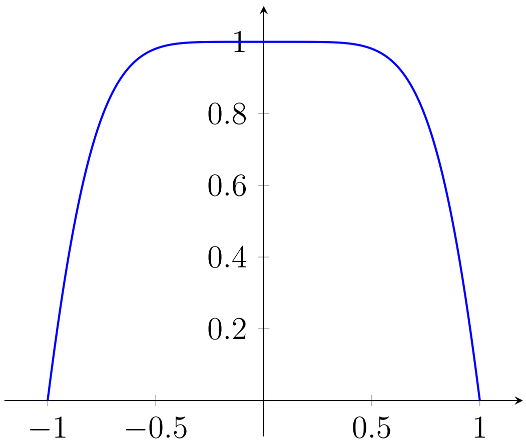
Il grafico di $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ è:



Il grafico di $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ è:

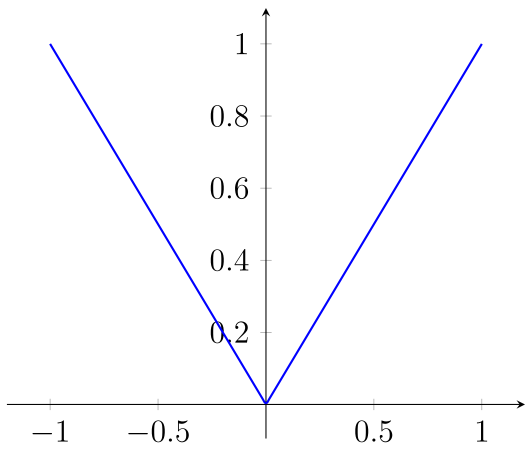


Il grafico di $f\left(x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x^{3}\right)$ è:



Si nota che all'aumentare dell'esponente x^k la curva presenta sempre più una "gobba" ma non crea la cuspide voluta ma, fondamentale, nel grafico si osserva che è derivabile in ogni punto nell'intervallo considerato.

Analizzo ora la 2 che ha al suo interno la funzione modulo che presenta la continuità ma non la derivabilità nello 0. Infatti il grafico di $f(x)=|x|$ è:



e tale non derivabilità è portata nella 2.

Considero, per semplicità la 2 solo nella parte positiva per cui risulta:

$$f(x) = -6x^3 + 9kx^2 - 4x + 1 \tag{4}$$

Per capire se può approssimare la figura 2, la cosa più semplice è studiare la derivata prima per osservare se la funzione è crescente o decrescente.

$$f^{'}(x) = -18x^2 + 18kx - 4 \tag{5}$$

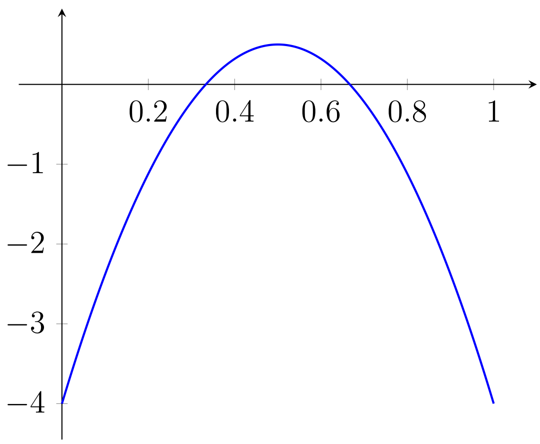
Prendo, per comodità il valore di $k = 1$ e annullo la 5 per trovare i punti stazionari:

$$f^{'}(x) = -18x^2 + 18x - 4 = 0 \tag{6}$$

$$-9x^2 + 9x - 2 = 0 \tag{7}$$

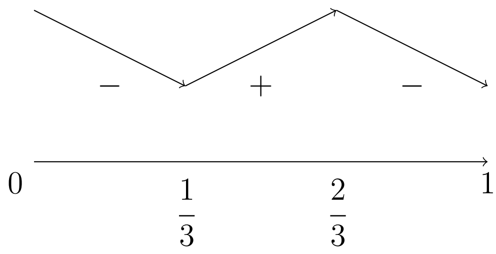
$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18} \tag{8}$$

e studiando il segno della derivata prima attraverso il metodo della "parabola" si ha il seguente grafico:



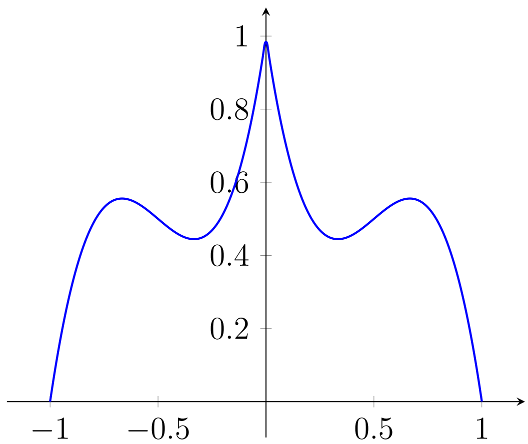
e si nota che l'intersezione avviene in $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

Studiando il segno della derivata prima si nota dove la funzione è crescente o decrescente.

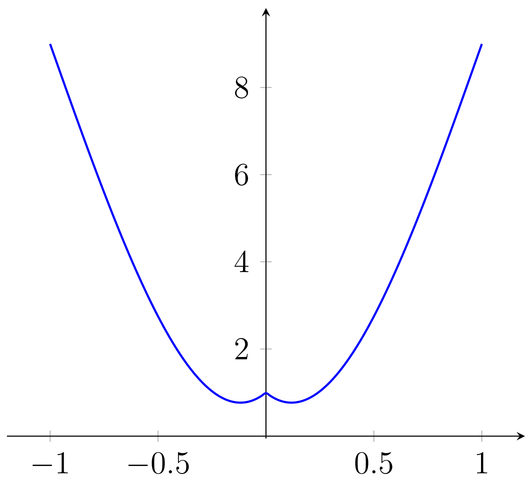


Già da questo si può escludere che anche la funzione 2 non descriva il profilo laterale. Per rafforzare l'affermazione si ha infatti il seguente grafico che rafforza le conclusioni precedenti.

Il grafico di $f(x) = -6|x|^3 + 9x^2 - 4|x| + 1$ con $k = 1$ è:

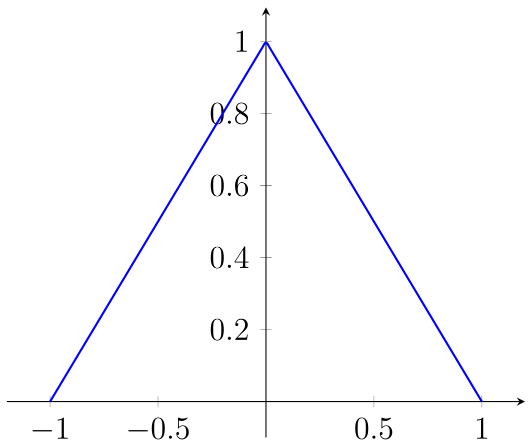


Il grafico di $f(x) = -6|x|^3 + 9 \cdot 2 \cdot x^2 - 4|x| + 1$ con $k = 2$ è:

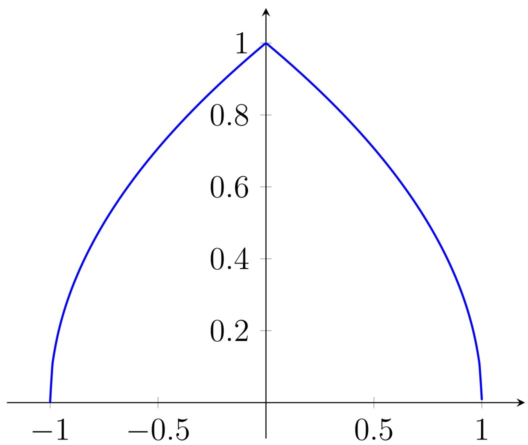


Già con $k = 2$ la funzione 2 non soddisfa le richieste.

Analizzo ora la 1. Con $k = 1$ si può fare il seguente grafico molto semplicemente.



Già con $k = 2$ il profilo migliora:



Senza continuare si può affermare con certezza che il profilo cercato sia dato proprio dalla funzione 1. Per capire il valore di k cercato si demanda al punto 2 del problema.

2. Per sviluppare il seguente punto è necessario impostare due disequazioni una che nasce dal fatto che parte dal seguente fatto:

$$V = A_b \cdot h \tag{9}$$

con $h = 8$ e $A_b = 2 \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}}$ e $V \geq 13$.

Ossia si evidenzia il fatto che **l'integrale di una funzione fornisce l'area della zona delimitata dalla curva stessa**. Inoltre prendo solo la parte positiva perché la funzione è pari e quindi raddoppio il risultato.

la 9 diventa:

$$16 \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}}\,dx \geq 13 \tag{10}$$

$$16 \cdot \left(-\frac{(1-x)^{\frac{1}{k}+1}}{\frac{1}{k}+1} \right)\Bigg|_0^1 \geq 13 \tag{11}$$

con dei semplici passaggi si arriva a questa disequazione:

$$\frac{16k}{k+1} \geq 13 \tag{12}$$

$$16k \geq 13k + 13 \tag{13}$$

$$3k \geq 13 \tag{14}$$

$$k \geq \frac{13}{3} \tag{15}$$

Il passaggio 13 si può fare, dopo aver effettuato il m.c.m. e quindi aver semplificato il denominatore perchè $k \neq -1$ essendo k **intero positivo**.

La seconda disequazione proviene dal fatto che si debba porre $\vartheta \geq 10$.

Ricordando la relazione che lega il coefficiente angolare con il valore dell'angolo si ha che:

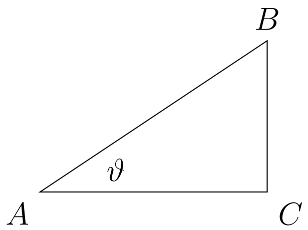
$$m \geq \tan(10) \tag{16}$$

Dimostro la 16. La retta passante per l'origine ha equazione $y = mx$ per cui:

$$m = \frac{y}{x} \tag{17}$$

ossia è il rapporto tra la coordinata y e la coordinata x

Adesso dato il seguente triangolo:



Le relazioni fondamentali della trigonometria permettono di affermare che:

$$BC = AB \cdot \sin\vartheta \tag{18}$$
$$AC = AB \cdot \cos\vartheta \tag{19}$$
$$\frac{BC}{AC} = \frac{AB \cdot \sin\vartheta}{AB \cdot \cos\vartheta} = \tan\vartheta \tag{20}$$

Si può pensare $BC = y$ e $AC = x$ per cui si ha:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{y}{x} = \tan\vartheta = m \tag{21}$$

che è esattamente la 16!

Ma il valore del coefficiente angolare m in un punto di una curva è dato proprio dal valore della derivata prima in quel punto ossia:

$$f'(x_0) = m \tag{22}$$

Nel caso specifico la funzione 1 non è derivabile nel punto 0 perché punto in cui la derivata prima cambia il segno ma questo, nel caso specifico è ininfluente in quanto indica l'inclinazione del tetto ed un tetto è proprio fatto come la funzione $|x|$. Per calcolare m quindi è sufficiente fare:

$$m = \lim_{x \to 0^+} f^{'}(x) \tag{23}$$

e

$$f^{'}(x) = \frac{1}{k} \cdot (1-x)^{\frac{1}{k}-1} \tag{24}$$

quindi

$$m = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{k} \cdot (1-x)^{\frac{1}{k}-1} = \frac{1}{k} \tag{25}$$

adesso unendo la 25 con la 16 si ha finalmente che:

$$\frac{1}{k} \geq \tan(10) \tag{26}$$

che risolta porta ad affermare che:

$$k \leq \frac{1}{\tan 10} \simeq 5.67 \tag{27}$$

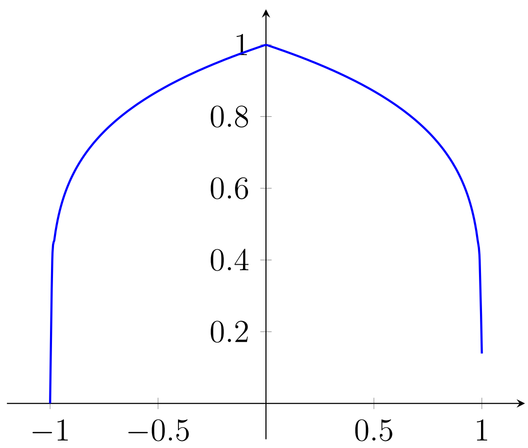
Quindi devo risolvere il seguente sistema di disequazioni dato dalle relazioni 27 e 15

$$\begin{cases} k \leq \frac{1}{\tan 10} \simeq 5.67 \\ k \geq \frac{13}{3} \simeq 4.3 \end{cases} \tag{28}$$

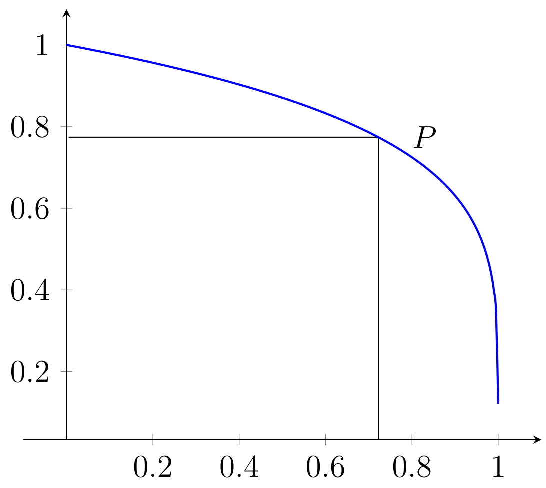
e l'unico valore di k che soddisfa entrambe le disequazioni risulta $k = 5$. Quindi la funzione che descrive meglio il profilo laterale è:

$$f(x) = (1-|x|)^{\frac{1}{5}} \tag{29}$$

il cui grafico è:



3. Ad una prima lettura sembra molto complesso ma se si prova ad immaginare graficamente la situazione è un quesito facilmente risolvibile. Immaginiamo di lavorare solo nell'asse positivo delle x.



Devo trovare le coordinate del punto P in maniera tale che poi conoscendo l'area del rettangolo identificato dalle proiezioni del punto P sull'asse x e sull'asse y e dell'arco delimitato posso trovare il valore del livello del gasolio all'interno del contenitore ancora calcolando il volume.

La coordinata y del punto P la chiamo z come richiesto dal quesito.

Per trovare la coordinata x del punto P devo risolvere la seguente equazione con incognita x:

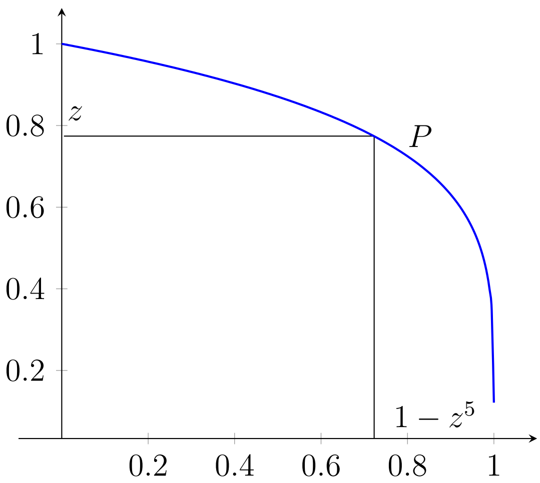
$$z = (1-x)^{\frac{1}{5}} \tag{30}$$

$$z^5 = \left((1-x)^{\frac{1}{5}}\right)^5 \tag{31}$$

$$z^5 = 1-x \tag{32}$$

$$x = 1-z^5 \tag{33}$$

quindi completo il grafico precedente con le coordinate trovate per poi eseguire i calcoli più velocemente:



Adesso per calcolare il volume del mio serbatoio utilizzo sempre la 29.

L'area di base è data dalla somma del rettangolo più il seguente integrale e tutto moltiplicato per 2.

$$\int_{1-z^5}^{1} (1-x)^{\frac{1}{5}}\, dx \tag{34}$$

$$\left(-\frac{(1-x)^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} \right)\Bigg|_{1-z^5}^{1} \tag{35}$$

$$\frac{\left((z^5)^{\frac{6}{5}} \right)}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6} \cdot z^6 \tag{36}$$

Adesso sommo a questo valore l'area del rettangolo che vale $z \cdot (1 - z^5)$

$$\frac{5}{6} z^6 + z\left(1 - z^5\right) = \frac{5}{6} z^6 + z - z^5 = z - \frac{1}{6} z^6 \tag{37}$$

Il volume assoluto è:

$$v(z) = 16 \cdot \left(z - \frac{1}{6} z^6 \right) \tag{38}$$

Per calcolare il volume relativo devo aver calcolato quanto vale il volume del serbatoio quando è pieno e lo si calcola sostituendo $z = 1$ nella 38.

$$V = 16 \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot 1^6 \right) = 16 \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \right) = 16 \cdot \frac{5}{6} = \frac{40}{3} \tag{39}$$

Il volume in funzione della percentuale di riempimento risulta:

$$V(z) = \frac{16\left(z - \frac{1}{6}z^6\right)}{\frac{40}{3}} \cdot 100 = \frac{6}{5}\left(z - \frac{1}{6}z^6\right) \cdot 100 \tag{40}$$

3. L'amministratore immagina che il serbatoio sia a forma di parallelepipedo non considerando l'inclinazione richiesta. Conseguentemente la funzione che utilizza è la seguente:

$$V(z) = z \cdot 100 \tag{41}$$

Verifico l'affermazione del testo ossia se $z = 0.5$ nel caso dell'amministratore ho:

$$V(z) = 0.5 \cdot 100 = 50\% \tag{42}$$

Nel caso reale ed usando la 40 si ha:

$$\frac{6}{5}\left(0.5 - \frac{1}{6} \cdot 0.5^6\right) \cdot 100 = 59.7\% \tag{43}$$

che è proprio il valore che suggeriva il testo del problema e rafforza la correttezza del risultato trovato.

Per calcolare il massimo errore che si commette studio la funzione che risulta dalla differenza tra quella utilizzata erroneamente dall'amministratore e quella corretta ed effettuo la derivata prima annullandola e così trovando il valore z per cui l'errore è massimo.

Tolgo la moltiplicazione per 100 che mi forniva il risultato in percentuale ma che in questo caso mi complica solo la notazione.

$$E(z) = z - \frac{6}{5}\left(z - \frac{1}{6}z^6\right) = -\frac{1}{5}z + \frac{1}{5}z^6 = -\frac{1}{5}\left(z - z^6\right) \tag{44}$$

Calcolo la derivata prima non considerando $-\frac{1}{5}$ in quanto devo solo annullare al derivata prima

$$E^{'}(z) = 1 - 6z^5 = 0 \tag{45}$$

$$z = \sqrt[5]{\frac{1}{6}} \tag{46}$$

che è il valore di z in cui si ha l'errore massimo e l'errore vale:

$$\left|E\left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right)\right| = \left|-\frac{1}{5}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\right| = \left|-\frac{1}{6}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right| \tag{47}$$

e vale in conclusione:

$$E = \frac{1}{6}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{6}} \tag{48}$$

1.2 Prerequisiti

- conoscere differenza tra continuità e differenziabilità di una funzione
- aver capito bene la funzione modulo $f(x) = |x|$
- conoscere l'andamento delle funzioni trigonometriche al variare dei parametri all'interno del loro argomento
- estrema velocità nel saper risolvere una disequazione di secondo grado
- fare velocemente lo schema per capire la crescenza e la decrescenza di una funzione
- praticità con le equazioni e disequazioni frazionarie
- conoscere molto bene il nucleo della goniometria per collegarla con la definizione di retta e del relativo coefficiente angolare.
- essere in grado di calcolare i limiti
- capire cosa significa che un punto appartiene ad una curva e la variazione delle sue coordinate.
- conoscere bene il significato geometrico della derivata
- capire il significato dell'area come integrale definito di una funzione
- essere in grado di calcolare velocemente gli integrali
- aver capito bene come si calcola il volume di una figura in generale e non solo per le figure geometriche canoniche.
- avere dimestichezza con il concetto di percentuale
- aver capito che l'uso della derivata consente di risolvere i problemi di massimo e minimo

2 Problema 2

Nella figura 3 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

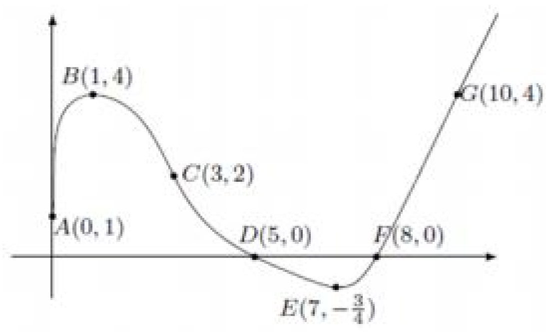


Figura 3:

E' noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f^{'}(x) \tag{49}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \tag{50}$$

   Quali sono i valori di $f^{'}(3)$ e $f^{'}(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = \left| f^{'}(x) \right| \tag{51}$$

$$y = |f(x)|^{'} \tag{52}$$

$$y = \frac{1}{f(x)} \tag{53}$$

   specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo $[0, 8]$, il valore medio di $y = f^{'}(x)$ nell'intervallo $[1.7]$ e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo $[9, 10]$.

4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

2.1 Sviluppo

1. Studio il grafico partendo dai punti del testo partendo da sinistra verso destra.

- In A si ha che la tangente è coincidente con l'asse y ed essa ha $m = +\infty$ per cui la mia $f^{'}(0)$ ha un asintoto verticale.

- In B si ha un punto di massimo ed esso è un punto in cui la derivata prima si annulla per cui $f^{'}(1) = 0$.

- Tra 0 e 1 la funzione è crescente per cui la derivata prima è positiva.

- Il punto C è un punto di flesso ossia significa che si annulla la derivata seconda ossia la derivata prima ha un punto di minimo (questo lo posso dire analizzando il segno della derivata prima) ossi $f^{''}(3) = 0$. Inoltre in tale punto si ha l'equazione della retta tangente ossia ricavando il coefficiente angolare ho subito il valore di $f^{'}(3)$

$$2x + y - 8 = 0 \tag{54}$$
$$y = 8 - 2x \tag{55}$$

  e si nota subito che $m = -2$ per cui $f^{'}(3) = -2$ che poi è la risposta ad uno dei quesiti posti.

- In D viene nuovamente fornita la retta tangente e valgono le considerazioni precedenti.

$$x + 2y - 5 = 0 \tag{56}$$
$$2y = 5 - x \tag{57}$$
$$y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \tag{58}$$

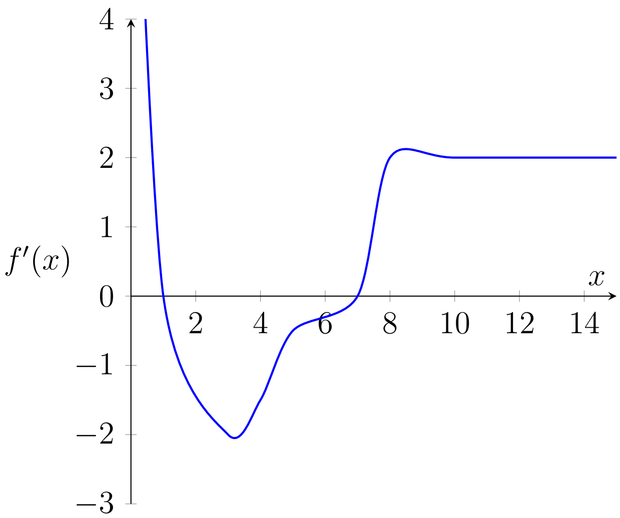
  e si nota che $m = -\frac{1}{2}$ per cui $f^{'}(5) = -\frac{1}{2}$ che è la risposta all'altro quesito richiesto.

- Il punto E è un punto di minimo ossia il punto in cui si annulla la derivata prima per cui si ha ancora che $f^{'}(7) = 0$.
- Fino al punto E la funzione è decrescente per cui la mia derivata prima è negativa
- Dal punto F il grafico di $f(x)$ è una retta ma posso calcolare il suo coefficiente angolare che mi fornirà quindi il valore della $f^{'}(x)$ per $x \geq 8$ e sarà una retta orizzontale. Il coefficiente angolare è dato dal rapporto tra la differenza delle coordinate y del punto G e del punto F e la differenza delle coordinate x sempre di queti due punti ossia:

$$m = \frac{y_G - y_F}{x_G - x_F} \tag{59}$$

$$m = \frac{4-0}{10-8} = 2 \tag{60}$$

Adesso si può indicativamente rappresentare il grafico di $f'(x)$ utilizzando tutte le informazioni precedenti.



Vedo ora di analizzare il grafico di 50.

- La funzione $f(x)$ in 0 ha un valore finito, questo fatto garantisce che qualunque sia la sua primitiva $F(0) = \int_0^0 f(x)dx$ è sempre 0. Ciò non sarebbe vero se $f(x)$ avesse l'asintoto verticale in 0.

- Studiare la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ significa calcolare il valore dell'area sottesa dalla curva di 3. Si osserva che tra il punto A e il punto D il valore dell'area aumenta sempre (crescente), diminuisce tra il punto D e il punto F perché l'area è negativa e quindi si sottrae a quella precedente per poi nuovamente aumentare dopo F. Schematizzando ulteriormente ciò che ho appena dimostrato si ha:
  - $F(x)$ crescente tra $0 < x < 5$;
  - $F(x)$ decrescente tra $5 < x < 8$;
  - $F(x)$ crescente per $x > 8$;
- si consideri ora il seguente schema che proviene dal teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \tag{61}$$
$$F^{'}(x) = f(x) \tag{62}$$
$$F^{''}(x) = f^{'}(x) \tag{63}$$

  quindi nel punto B si ha un flesso perché si annulla $f^{'}(x)$ come pure nel punto E
- Nel punto D e nel punto F si ha rispettivamente un punto di massimo ed un punto di minimo.
- $F(5) = 11$ peri dati forniti in partenza ossia che l'area dell'arco ABCD vale 11.
- ora sempre usando il dato di partenza per cui l'area dell'arco DEF vale 1 e considerando che contribuisce in maniera negativa si ha che:

$$\int_0^5 f(t)dt + \int_5^8 f(t)dt = \int_0^8 f(t)dt \tag{64}$$
$$11 - 1 = F(8) \tag{65}$$

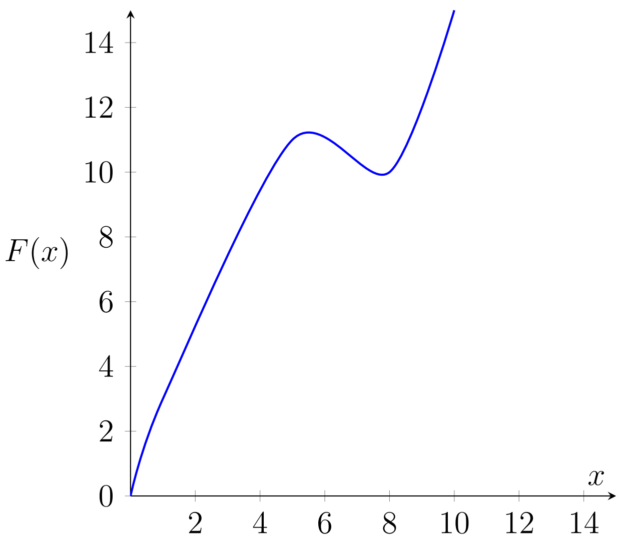
  ossia F(8)=10
- adesso per $x \geq 8$ so che $f(x)$ è una retta con $m = 2$, come precedentemente calcolato e per trovare q è sufficiente sostituire all'equazione generica della retta $y = 2x + q$ o il punto G o il punto F. Sostituisco

le coordinate del punto G

$$y = 2x + q \tag{66}$$
$$4 = 2 \cdot 10 + q \tag{67}$$
$$4 = 20 + q \tag{68}$$
$$q = -16 \tag{69}$$
$$y = 2x - 16 \tag{70}$$

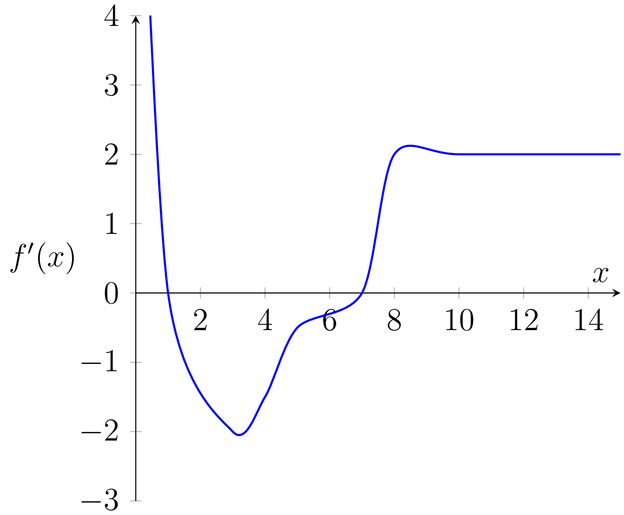
Quindi e sempre crescente per $x \geq 8$.

La rappresentazione grafica è approssimativamente:

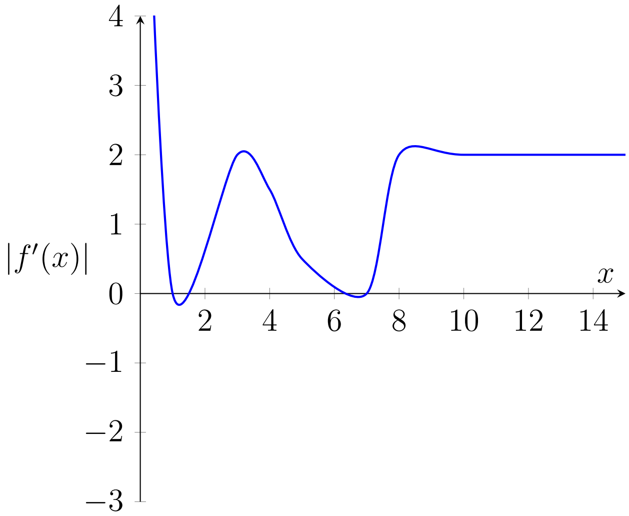


2.1 Grafico di $y = \left|f'(x)\right|$.

Per sviluppare il primo punto si parte dal seguente grafico e la parte negativa sarà disegnata nell'asse positiva in maniera simmetrica proprio per la proprietà del modulo.



quindi il grafico risulta:



2.2. Grafico di $y = |f\,(x)|^{'}$

Si deve partire questa volta da quella di partenza utilizzando tutti i calcoli già fatti nel punto 1 ma adattandoli alla nuova funzione.

Riporto in sintesi le conclusioni precedenti adattandole alla nuova funzione per poi estrapolare il grafico:

- In A si ha che la tangente è coincidente con l'asse y ed essa ha $m = +\infty$ per cui la mia $f^{'}(0)$ ha un asintoto verticale.

- In B si ha un punto di massimo ed esso è un punto in cui la derivata prima si annulla per cui $f^{'}(1) = 0$.

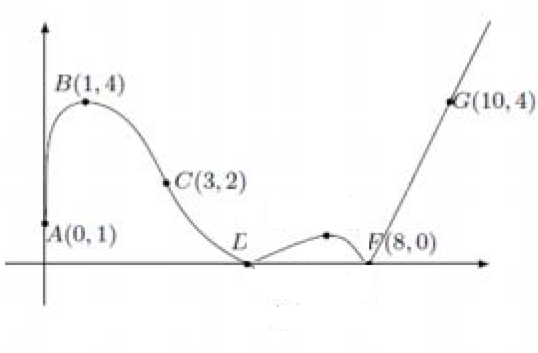
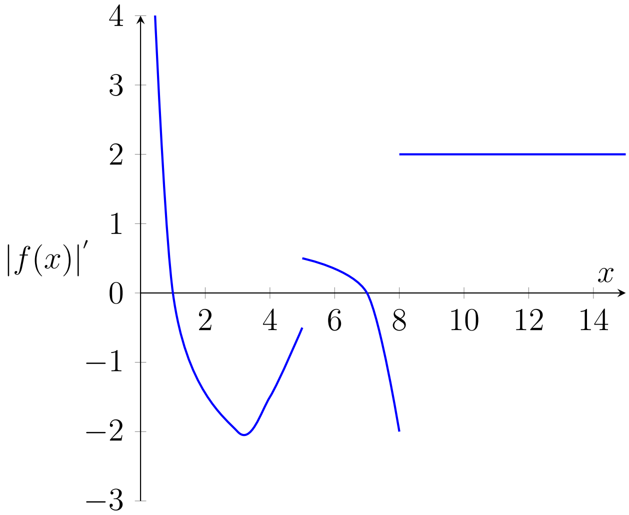


Figura 4:

- Tra 0 e 1 la funzione è crescente per cui la derivata prima è positiva.
- $f'(3) = -2$
- $f'(5) = -\frac{1}{2}$ provenendo da sinistra in quanto in 5 la funzione è non derivabile.
- $f'(5) = \frac{1}{2}$ provenendo da sinistra
- Il punto E è un punto di massimo questa volta ossia il punto in cui si annulla la derivata prima per cui si ha ancora che $f'(7) = 0$.
- Nel punto F come in quello D ossia per $x = 5$ e $x = 8$ si ha una discontinuità di seconda specie. La funzione $f'(8) = -2$ provenendo da sinistra mentre $f'(8) = 2$ provenendo da destra.
- per $x \geq 8$ è una retta orizzontale con equazione $y = 2$.

Il grafico risulta:



2.3. Il grafico di $y = \dfrac{1}{f(x)}$
Conviene utilizzare il seguente schema:

- $f(0) = 1$ implica che $\dfrac{1}{f(0)} = 1$
- tra $x = 0$ e $x = 1$ se $f(x)$ è crescente $\dfrac{1}{f(x)}$ è decrescente.
- $f(1) = 4$ implica che $\dfrac{1}{f(1)} = \dfrac{1}{4}$
- tra $x = 1$ e $x = 5$ la $f(x)$ è decrescente $\dfrac{1}{f(x)}$ è cescente.Questo ragionamento vale sempre se la prima cresce la seconda decresce.
- $f(3) = 2$ implica che $\dfrac{1}{f(3)} = \dfrac{1}{2}$
- $f(5) = 0$ implica che in tale punto non esiste la mia funzione $y = \dfrac{1}{f(x)}$ ma posso studiare cosa accade nel suo intorno ossia in termini matematici lavorare con i limiti

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty \tag{71}$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty \tag{72}$$

Per capire perché il limite fornisce il risultato precedente si osserva il segno della funzione $f(x)$ nell'intorno del 5 e si nota che per valori leggermente più piccoli del 5 è sempre positiva mentre per valori leggermente più grandi del 5 è sempre negativa.

- $f(7) = -\frac{3}{4}2$ implica che $\frac{1}{f(7)} = -\frac{4}{3}$

- $f(8) = 0$ implica che in tale punto non esiste la mia funzione $y = \frac{1}{f(x)}$ ma posso studiare cosa accade nel suo intorno ossia in termini matematici lavorare con i limiti

$$\lim_{x\to 8^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty \tag{73}$$

$$\lim_{x\to 8^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty \tag{74}$$

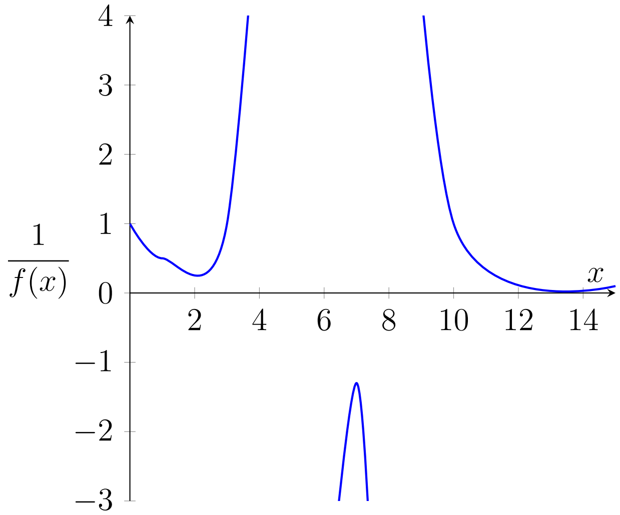
Per capire perché il limite fornisce il risultato precedente si osserva il segno della funzione $f(x)$ nell'intorno dell'8 e si nota che per valori leggermente più piccoli dell'8 è sempre negativa mentre per valori leggermente più grandi dell'8 è sempre positiva.

- $f(10) = 4$ implica che $\frac{1}{f(4)} = \frac{1}{4}$

- ultima considerazione, siccome $f(x) = 2x - 16$ per $x \geq 8$ si ha pure che $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x-16}$ per cui:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \tag{75}$$

Adesso tutte le informazioni precedenti permettono di avere il seguente grafico qualitativo:



3.1. Premetto che calcolare il valore medio di una funzione significa:

$$m_{f(x)} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \tag{76}$$

Sempre nell'intervallo $[0, 8]$ la applico alla prima richiesta ossia per $y = f(x)$

$$m_{f(x)} = \frac{1}{8-0} \cdot \left(\int_0^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx \right) = \frac{1}{8} \cdot (11-1) = \frac{1}{8} \cdot 10 = \frac{5}{4} \tag{77}$$

3.2. Per la seconda richiesta ossia per $y = |f(x)|$ sempre tra $[0, 8]$

$$m_{|f(x)|} = \frac{1}{8-0} \cdot \left(\int_0^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx \right) = \frac{1}{8} \cdot (11+1) = \frac{1}{8} \cdot 12 = \frac{3}{2} \tag{78}$$

3.3. Per la terza richiesta $y = f^{'}(x)$ tra $[1, 7]$

$$m_{f'(x)} = \frac{1}{7-1} \cdot \left(\int_1^7 f^{'}(x)dx \right) \tag{79}$$

Applicando il teorema fondamentale del calcolo degli integrali definiti posso risolverlo così:

$$\frac{1}{7-16} \cdot f(x)|_1^7 = \frac{1}{6} \cdot (f(7) - f(1)) = \frac{1}{6} \left(-\frac{3}{4} - 4 \right) = \frac{1}{6} \cdot -\frac{19}{4} = -\frac{19}{24} \tag{80}$$

3.4. Per l'ultima richiesta $y = F(x)$ tra $[9, 10]$

$$m_{F(x)} = \frac{1}{10-9} \cdot \int_9^{10} F(x)dx \tag{81}$$

Per questo ci viene d'aiuto il fatto che tra $[9, 10]$ $f(x) = 2x - 16$ come dimostrato precedentemente nell 70.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (2t - 16)\, dt = \frac{2x^2}{2} - 16x + k = x^2 - 16x + k \quad (82)$$

ma si sa, sempre calcolato precedentemente in 65che $F(8) = 10$ per cui:

$$F(8) = 8^2 - 16 \cdot 8 + k = 10 \quad (83)$$
$$64 - 128 + k = 10 \quad (84)$$
$$k = 10 - 64 + 128 \quad (85)$$
$$k = 74 \quad (86)$$

quindi grazie a questi passaggi $F(x) = x^2 - 16x + 74$ sempre tra $[9, 10]$. Adesso posso calcolare la 81.

$$m_{F(x)} = 1 \cdot \int_9^{10} \left(x^2 - 16x + 74\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 16\frac{x^2}{2} + 74x\right)\Bigg|_9^{10} = \quad (87)$$

$$\left(\frac{1000}{3} - 800 + 740\right) - \left(\frac{729}{3} + 648 + 666\right) = \frac{271}{3} - 78 = \frac{37}{3} \quad (88)$$

4.1. Per trovare la retta tangente $y = mx+q$ in 0 per $F(x)$ devo conoscere:

- $F'(0)$ per trovare m
- $F(0)$ per trovare la q

$$F'(0) = f(0) = 1 = m \quad (89)$$
$$F(0) = 0 = q \quad (90)$$

Per cui la retta tangente è $y = x$

4.2 Per trovare la retta tangente $y = mx+q$ in 8 per $F(x)$ devo conoscere:

- $F'(8)$ per trovare m
- $F(8)$ per trovare la q

$$F'(8) = f(8) = 0 = m \quad (91)$$
$$F(8) = 10 \quad (92)$$

Quest'ultima già calcolata in 65 Per cui la retta tangente è $y = 10$

2.2 Prerequisiti

- conoscere molto bene il concetto di derivata e retta tangente in quel punto
- conoscer molto bene la relazione tra la derivata prima e la crescenza e decrescenza di una funzione
- significato del coefficiente angolare e derivata della funzione
- saper disegnare una retta passante per due punti
- aver capito molto bene la relazione tra integrale e derivata
- conoscere molto bene gli integrali definiti
- avere ottima dimestichezza con i grafici
- conoscere molto bene la funzione modulo
- aver capito il dominio di una funzione
- aver fatto pratica con il grafico di una funzione e della sua reciproca
- conoscere i limiti destro e sinistro di una funzione
- conoscere il valore medio di una funzione

3 Quesito 1

E' noto che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{93}$$

Stabilire se il numero reale u, tale che

$$\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx = 1 \tag{94}$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

$$A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2} dx \tag{95}$$

$$B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2} dx \tag{96}$$

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx \tag{97}$$

3.1 Sviluppo

3.1. Per dimostrare che u sia positivo bisogna dimostrare che la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ sia una funzione pari e sempre positiva. Affinché una funzione sia pari deve essere soddisfatta la condizione:

$$f(x) = f(-x) \tag{98}$$

infatti

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x) \tag{99}$$

quindi è pari ed inoltre anche sempre positiva. Quando una funzione è pari è sufficiente studiare metà del suo integrale per cui:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{100}$$

quindi posso affermare che:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \simeq 0.88 \tag{101}$$

Conseguentemente

$$1 = \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx > \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \simeq 0.88 \tag{102}$$

ed affinchè sia valida u non può che essere positivo.

3.2. Per calcolare la $A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2} dx$ si deve adesso pensare il grafico della funzione $x^7 e^{-x^2}$ e si dimostra che è una funzione dispari. Affinchè sia una funzione dispari deve valere la seguente condizione:

$$f(x) = -f(-x) \tag{103}$$

Infatti:

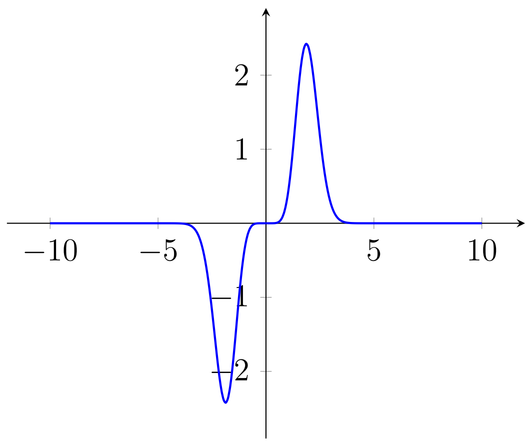
$$f(-x) = (-x)^7 e^{-(-x)^2} = -x^7 e^{-(x)^2} \tag{104}$$

$$-f(-x) = x^7 e^{-x^2} = f(x) \tag{105}$$

ed essendo dispari allora vale la seguente condizione negli integrali:

$$\int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2} dx = \int_{-u}^{0} x^7 e^{-x^2} dx + \int_{0}^{u} x^7 e^{-x^2} dx = 0 \tag{106}$$

Anche graficamente si dimostra l'affermazione precedente:



3.3. Anche in questo caso divido opportunamente l'integrale:

$$B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2} dx = \tag{107}$$

$$2 \cdot \int_{0}^{u} e^{-x^2} dx = 2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx \right) = \tag{108}$$

$$2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = 2 - \sqrt{\pi} \tag{109}$$

3.4. Per risolvere questo integrale si utilizza una variabile d'appoggio ossia:

$$x = \frac{t}{\sqrt{5}} \tag{110}$$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{5}} dt \tag{111}$$

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{5}} \tag{112}$$

3.2 Prerequisiti

- conoscere le condizioni per determinare se una funzione è pari o dispari
- saper scomporre gli integrali definiti attraverso la scomposizione in intervalli
- saper calcolare gli integrali con le variabili d'appoggio

4 Quesito 2

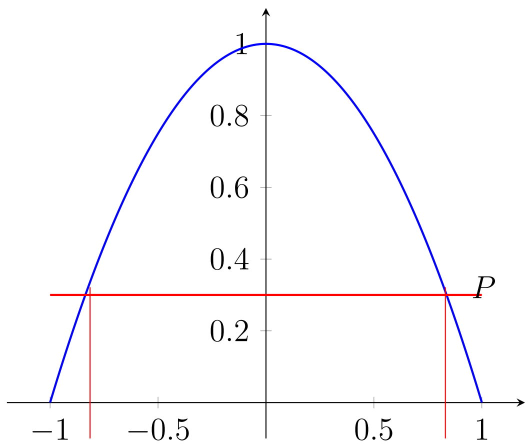
Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2 \tag{113}$$

con $a > 0$ si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x, nel segmento parabolico delimitato dall'asse x. Determinare a in modo che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

4.1 Sviluppo

E' un problema di determinazione dei massimi una volta calcolata la funzione che descrive la situazione. Parto dal grafico che permette poi più facilmente nel determinare le due funzioni quella per calcolare l'area e quello per calcolare il perimetro.



In rosso ho disegnato il rettangolo inscritto. Il punto P ha coordinate $P(x, 1-ax^2)$. L'area ha equazione:

$$A(x) = 2x \cdot (1 - ax^2) = 2x - 2ax^3 \tag{114}$$

$$A^{'}(x) = 2 - 6ax^2 = 0 \tag{115}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3a}} \tag{116}$$

Il perimetro ha equazione:

$$P(x) = 4x + 2(1 - ax^2) = 4x + 2 - 2ax^2 \tag{117}$$

$$P^{'}(x) = 4 - 4ax = 0 \tag{118}$$

$$x = \frac{1}{a} \tag{119}$$

Adesso devo uguagliare i due risultati ottenuti ossia (116)=(119)

$$\frac{1}{\sqrt{3a}} = \frac{1}{a} \tag{120}$$

$$a = 3 \tag{121}$$

4.2 Prerequisiti

- saper rappresentare velocemente una parabola
- capire cosa significa che un punto appartiene ad una funzione
- conoscere area e perimetro di un rettangolo
- capire che risolver un problema di massimo/minimo significa identificare una funzione e saper fare la sua derivata
- saper risolvere un'equazione frazionaria
- confidenza con i radicali

5 Quesito 3

Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h. Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da:

$$V = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right) \tag{122}$$

5.1 Sviluppo

E' un problema del calcolo di un volume di un solido conoscendo la sezione. Il problema è esprime la sezione in funzione di x con x la distanza di non riempimento della sfera. In pratica usando il seguente grafico si visualizza la situazione:

L'area di una circonferenza è:

$$A = \pi \cdot R^2 \tag{123}$$

$$R^2 = r^2 - (r - x)^2 \tag{124}$$

$$A = \pi \cdot [r^2 - (r - x)^2] \tag{125}$$

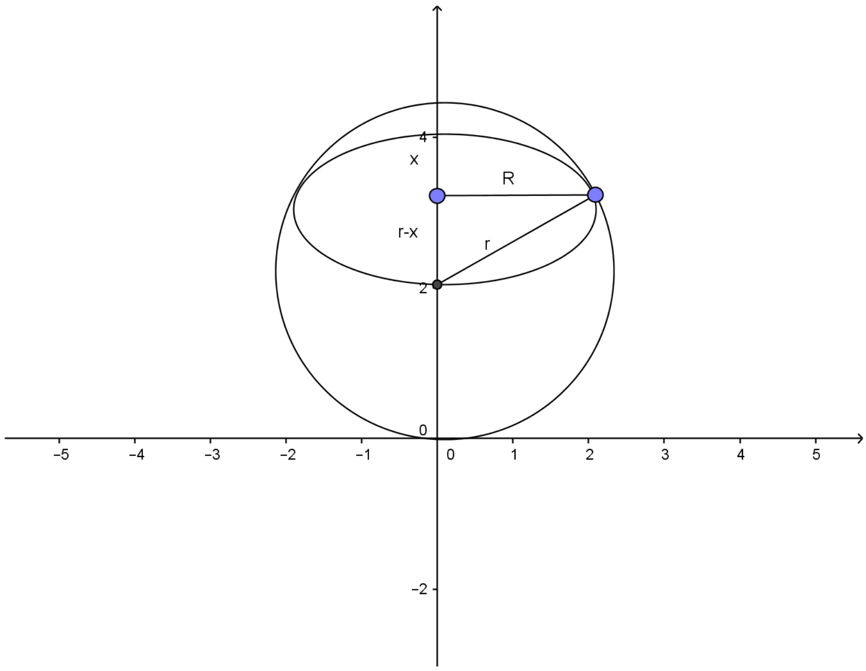


Figura 5:

Adesso il volume del solido conoscendo l'area della sezione la si calcola effettuando il seguente integrale:

$$V = \pi \int_0^h \left(r^2 - (r-x)^2\right) dx = \pi \int_0^h \left(r^2 - (r^2 - 2rx + x^2)\right) = \pi \int_0^h \left(r^2 - r^2 + 2rx - x^2\right) \tag{126}$$

$$\pi \int_0^h \left(2rx - x^2\right) = \pi \left(\frac{2rx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \tag{127}$$

$$\pi \left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right) \tag{128}$$

5.2 Prerequisiti

- conoscere il significato dell'integrale conoscendo l'area di base per calcolare il volume
- saper schematizzare ed immaginare la situazione nello spazio
- saper sempre applicare il teorema di Pitagora

6 Quesito 4

Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

6.1 Sviluppo

E' il caso classico di applicazione della distribuzione di probabilità binomiale o più comunemente di Bernoulli. Si applica quando o capita un evento o il suo opposto; o testa o croce, o risposta esatta o risposta sbagliata. La Distribuzione di Probabilità è per definizione l'integrale della densità di probabilità per cui ancora una volta si ha un problema di integrali. Ossia la distribuzione è ancora il calcolo dell'area sottesa dalla curva chiamata densità di probabilità.

Essa ha la seguente forma:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{129}$$

dove con p intendo la probabilità che capiti la risposta esatta che risulta $p = \frac{1}{4}$ mentre q è la probabilità che si abbia la risposta sbagliata che risulta $q = \frac{3}{4}$ Il quesito chiede di aver risposto almento ad 8 domande per cui dovrò calcolare:

$$p_8 + p_9 + p_{10} \tag{130}$$

quindi

$$p_8 = \binom{10}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{10!}{8!(10-8)!} \cdot \frac{9}{4^{10}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2!8!} \cdot \frac{9}{4^{10}} = 45 \cdot \frac{9}{4^{10}} \tag{131}$$

$$p_9 = \binom{10}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^9 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{10!}{9!(10-9)!} \cdot \frac{3}{4^{10}} = \frac{10 \cdot 9!}{1!9!} \cdot \frac{3}{4^{10}} = 10 \cdot \frac{3}{4^{10}} \tag{132}$$

$$p_{10} = \binom{10}{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \cdot \frac{1}{4^{10}} \tag{133}$$

Sommando i risultati precedenti ho:

$$P = 45 \cdot \frac{9}{4^{10}} + 10 \cdot \frac{3}{4^{10}} + 1 \cdot \frac{1}{4^{10}} = \frac{405 + 30 + 1}{4^{10}} = \frac{436}{4^{10}} \tag{134}$$

6.2 Prerequisiti

- conoscere l'applicabilità della distribuzione di probabilità binomiale
- conoscere lo sviluppo del binomio di Newton

7 Quesito 5

Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2,-1,2)$, è tangente al piano $\prod$ avente equazione $2x-2y+z-9=0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

7.1 Sviluppo

5.1.Il vettore che identifica il piano è identificato dai coefficienti che moltiplicano le tra incognite del piano ossia $v=(2,-2,1)$. La retta passante per il punto K e passante per il piano è identificata nello spazio dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x=2t-2 \\ y=-2t-1 \\ z=t+2 \end{cases} \tag{135}$$

Adesso per trovare il punto di intersezione si deve risolvere il seguente sistema con incognita t.

$$\begin{cases} 2x-2y+z-9=0 \\ x=2t-2 \\ y=-2t-1 \\ z=t+2 \end{cases} \tag{136}$$

$$2(2t-2)-2(-2t-1)+t+2-9=0 \tag{137}$$

$$4t-4+4t+2+t+2-9=0 \tag{138}$$

$$9t=9 \tag{139}$$

$$t=1 \tag{140}$$

Adesso sostituisco il valore di $t=1$ nell'equazione del piano passante per K e secante il pino ed ho il punto di tangenza.

$$\begin{cases} x=2t-2=2\cdot 1-2=0 \\ y=-2t-1=-2\cdot 1-1=-3 \\ z=t+2=1+2=3 \end{cases} \tag{141}$$

Il punto di tangenza ha coordinate $T(0,-3,3)$

5.2. Il raggio della sfera è data dalla distanza tra il punto k ed il piano. Si utilizza la generalizzazione della distanza di un punto da una retta ma visto nell'ottica spaziale.

$$d = \frac{|ax_p + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|(2 \cdot -2) + (-2 \cdot -1) + (1 \cdot +2) - 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{9}{3} = 3 \tag{142}$$

Si poteva anche calcolare avendo il punto di tangenza come la distanza tra due punti nello spazio usando la formula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{143}$$

Applicandola ai punti K e T e si trova lo stesso risultato.

7.2 Prerequisiti

- conoscere l'equazione parametrica di una retta nello spazio
- sapere l'equazione di una retta passante per un punto nello spazio e che attraversa un piano
- equazione di una sfera nello spazio
- distanza tra due punti nello spazio
- distanza tra un punto nello spazio ed un piano

8 Quesito 6

Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta: "Esiste un polinomio P(x) tale che:$|P(x) - \cos(x))| \leq 10^{-3}$,$\forall x \in \mathbb{R}$

8.1 Sviluppo

E' un problema veramente ricco di tranelli in quanto bisogna partire dalla serie di Taylor che serve per approssimare una funzione in un intorno di un punto ossia:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + ... \tag{144}$$

se il punto $x_0 = 0$ lo sviluppo in serie si chiama di Mclaurin. In realtà lo sviluppo quindi è valido solo in un intorno di un particolare punto. Il problema chiede l'approssimazione in tutto $\mathbb{R}$ per cui l'affermazione è falsa.

8.2 Prerequisiti

- conoscere molto bene il significato dello sviluppo in serie di una funzione e la sua applicabilità

9 Quesito 7

Una pallina è collocata nella casella in baso a sinistra di una scacchiera, com ein figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?

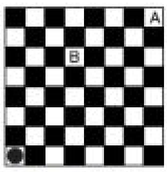


Figura 6:

9.1 Sviluppo

E' un problema di permutazioni con ripetizioni dove le ripetizioni sono il numero di spostamenti verso l'alto ed il numero di spostamenti a destra. Prima di applicare la formula generica faccio un esempio.

Voglio calcolare tutti gli anagrammi della parola TETTO.

Uso il concetto di permutazione ossia P! ossia il numero di combinazioni diverse che posso avere per un gruppo formato da n elementi.

Ad esempio ho 5 sedie e 5 persone, per sapere come si possono sedere queste 5 persone posso calcolare 5!=120. Queste persone di possono sedere in 120 modi diversi.

Tornando al caso della parola TETTO, noto che vi sono tre T e queste formeranno sempre un gruppo uguale ossi l'anagramma EOTTT viene ripetuto 6 volte ossia proprio 3!=6.

Quindi il numero di parole diverse sarà dato da $\frac{120}{6} = 20$.

Il problema si può generalizzare considerando i tanti sottogruppi che si possono fare e la formula che generalizza il ragionamento precedente è:

$$P_n^{h,k,..} = \frac{n!}{h!k! \cdot ...} \tag{145}$$

con h, k il numero di elementi dei sottogruppi con elementi uguali.

Tornando al problema.

La probabilità è definita sempre come il rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili; in questo caso i casi possibili sono tutti i percorsi per andare dal punto di partenza al punto di arrivo e sono comunque 7 spostamenti verso l'alto (primo gruppo di 7 elementi) e 7 spostamenti verso destra (altro gruppo di 7 elementi) su 14 mosse ed applicando la 145 si ha:

$$P_{14}^{7,7} = \frac{14!}{7!7!} = 3432 \tag{146}$$

Per calcolare adesso i casi favorevoli prima calcolo come arrivo al punto B e poi come dal punto B arrivo ad A e i risultati ottenuti li moltiplico. Per arrivare a B mi sposterò 5 volte in alto (primo gruppo) e 3 volte a destra (secondo gruppo), in questo caso con 8 mosse. Applicando la 145 ho:

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5!3!} = 56 \tag{147}$$

Per arrivare ad A partendo da B mi sposterò 2 volte in alto (primo gruppo) e 4 volte a destra (secondo gruppo), in questo caso in 6 mosse. Applico la 145 ho:

$$P_6^{2,4} = \frac{8!}{2!4!} = 15 \tag{148}$$

I casi favorevoli sono quindi $15 \cdot 56 = 840$

Adesso sono in grado di calcolare la probabilità voluta:

$$P = \frac{840}{3432} = \frac{35}{143} \tag{149}$$

9.2 Prerequisiti

- aver capito veramente molto bene il concetto di permutazioni semplici e permutazioni con ripetizione e i loro casi di applicazione

10 Quesito 8

Data la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$, individuare la primitiva di f(x) il cui grafico passa per il punto $(1, 2e)$.

10.1 Sviluppo

Si deve integrare per parti ossi usare il seguente procedimento:

$$\int f^{'}(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g^{'}(x) \tag{150}$$

dove:

$$f^{'}(x) = e^x \rightarrow f(x) = e^x \tag{151}$$

$$g(x) = 2x + x^2 \rightarrow g^{'}(x) = 2 + 2x \tag{152}$$

Applicando la 150 si ha:

$$\int e^x \cdot \left(2x + x^2\right) dx = e^x \cdot \left(2x + x^2\right) - \int e^x \cdot (2 + 2x)\, dx \tag{153}$$

Applico nuovamente l'integrazioni per parti adesso all'integrale rimasto questa volta però:

$$f^{'}(x) = e^x \rightarrow f(x) = e^x \tag{154}$$

$$g(x) = 2 + 2x \rightarrow g^{'}(x) = 2 \tag{155}$$

$$\int e^x \cdot (2 + 2x)\, dx = e^x \cdot (2 + 2x) - \int e^x \cdot 2 = e^x \cdot (2 + 2x) - 2e^x + k \tag{156}$$

Riunendo i risultati ottenuti si ha:

$$f(x) = e^x \cdot \left(2x + x^2\right) - (e^x \cdot (2 + 2x) - 2e^x) + k = 2xe^x + x^2e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x = x^2e^x + k \tag{157}$$

sfruttando la conoscenza del punto $(1, 2e)$ si ha che:

$$f(1) = e + k = 2e \tag{158}$$

$$k = e \tag{159}$$

La funzione richiesta è:

$$f(x) = x^2e^x + e \tag{160}$$

10.2 Prerequisiti

- conoscere l'integrazioni per parti
- applicare l'integrazione per parti in maniere reiterante

11 Quesito 9

Data la retta:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \tag{161}$$

e la retta

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \tag{162}$$

e il punto $P(1, 0, -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

11.1 Sviluppo

Determino i vettori direttori delle due rette. Nel caso della retta:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \tag{163}$$

il vettore direttorio è $v = (1, 2, 1)$ ossia sono i coefficienti che moltiplicano la t.

Nel caso della retta:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \tag{164}$$

si deve manipolarla ponendo $x = t$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -3t + 3 \end{cases} \tag{165}$$

il vettore direttore è $u = (1, 2, -3)$

Adesso si applica la seguente regola ossia date due rette non parallele di cui si conoscono i vettori direttori, l'equazione del piano passante per un punto ha equazione:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0 \tag{166}$$

Applicandola al caso specifico si ha:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \tag{167}$$

Sviluppando il determinante si ha:

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \tag{168}$$

$$(x-1)\cdot(-8) - y\cdot(-4) = 0 \tag{169}$$

$$-8x + 8 + 4y = 0 \tag{170}$$

$$-2x + 2 + y \tag{171}$$

171 è il risultato richiesto.

11.2 Prerequisiti

- essere in grado di trovare il vettore direttorio di un piano
- conoscere la formula che permette di determinare il piano parallelo a due rette non parallele
- essere in grado di calcolare il determinante di una matrice almeno 3x3

12 Quesito 10

Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1, +\infty)$:

$$f(x) = \int_e^{x^2} \frac{t}{ln(t)} dt \tag{172}$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

12.1 Sviluppo

Il teorema fondamentale del calcolo degli integrali definiti mi consente di eseguire il seguente passaggio. Passaggio necessario per trovare il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione data:

$$f^{'}(x) = \frac{d}{dx}\int_e^{x^2} \frac{t}{ln(t)} dt = \frac{x^2}{ln(x^2)} \cdot 2x \tag{173}$$

$$f^{'}(\sqrt{e}) = \frac{2e\sqrt{e}}{ln(e)} = 2e\sqrt{e} = m \tag{174}$$

Adesso devo trovare il valore della funzione $f(x)$ in $\sqrt{e}$.

$$f(\sqrt{e}) = \int_{e}^{e} \frac{t}{ln(t)} dt = 0 \tag{175}$$

$$y = 2e\sqrt{e}x + q \tag{176}$$

$$0 = 2e^2 + q \tag{177}$$

$$q = -2e^2 \tag{178}$$

La retta tangente alla funzione e passante per il punto richiesto vale quindi

$$y = y = 2e\sqrt{e}x - 2e^2 \tag{179}$$

12.2 Prerequisiti

- conoscere il teorema fondamentale del calcolo integrale
- avere molta praticità con gli integrali definiti
- aver capito perfettamente l'importanza della derivata e la sua correlazione con il coefficiente angolare della retta tangente.