# 10 Probabilità

Il *calcolo delle probabilità* nacque più di trecento anni fa, per risolvere problemi legati ai giochi d'azzardo, che in quel tempo erano molto diffusi (dadi, carte...). Giocando sorse la curiosità di scoprire *se il caso seguisse delle regole*, se ci fosse un *metodo razionale* per decidere su quale risultato convenisse puntare. Gli uomini di scienza iniziarono ad occuparsi di questo tipo di problemi e, col passare del tempo, fecero del *calcolo delle probabilità* un vero e proprio ramo di ricerca matematica. Oggi tale disciplina è fondamentale in molti campi delle scienze pure e sociali, per realizzare previsioni sull'evoluzione dei più importanti fenomeni collettivi.
Per poter affrontare alcuni problemi di probabilità occorre premettere uno studio di *calcolo combinatorio*.

## obiettivi

- **Calcolare disposizioni, permutazioni, combinazioni;**
- **definire lo spazio degli eventi associato ad un esperimento statistico;**
- **mettere in relazione l'esito di un esperimento statistico con la realizzazione di un evento;**
- **individuare il prodotto, la somma, il contrario di eventi dati;**
- **conoscere gli assiomi della probabilità e la sua definizione classica;**
- **calcolare la probabilità di un evento applicando la definizione classica;**
- **conoscere le concezioni frequentista e soggettivista di probabilità.**

# 10.1 Calcolo combinatorio

In questo paragrafo esamineremo i concetti classici di calcolo combinatorio, in vista della loro applicazione alla probabilità che faremo nel prossimo paragrafo.

Consideriamo un insieme di $n$ oggetti o elementi di natura qualsiasi, tali però che si sappiano distinguere l'uno dall'altro.
Indichiamo questi $n$ oggetti con una stessa lettera contrassegnata da un indice per esempio, con:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n.$$

Con questi $n$ oggetti si vogliono formare dei gruppi[1], ciascuno costituito da uno stesso numero $k$ di oggetti, con $k$ numero intero minore o uguale ad $n$. Il numero dei gruppi che si possono formare dipenderà, evidentemente, dalla legge di formazione dei gruppi stessi.
Ebbene, *il* **calcolo combinatorio** *si propone di studiare, cioè di costruire e di stabilire il numero totale dei gruppi che si possono formare con un dato numero di oggetti, una volta fissata la legge di formazione di tali gruppi.*

## Disposizioni semplici di *n* oggetti

**DEFINIZIONE**
Dati $n$ elementi distinti, si chiama **disposizione semplice** degli $n$ elementi, presi a $k$ a $k$, ($k \leq n$), o della classe $k$, un gruppo ordinato di $k$ degli $n$ elementi dati.

*Due di tali disposizioni si ritengono diverse quando differiscono per almeno un elemento, oppure per l'ordine con cui gli elementi si presentano.*

**ESEMPIO**

*Consideriamo quattro oggetti che indichiamo con:* $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$.

- Le disposizioni semplici di questi quattro oggetti, presi a 1 a 1, o della classe 1, sono dunque gruppi ognuno dei quali deve contenere un solo oggetto; perciò le disposizioni a 1 a 1 sono gli oggetti stessi, cioè:

  (1) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4.$$

- Se vogliamo ora le disposizioni di questi quattro oggetti presi a 2 a 2, dobbiamo formare tutti quei gruppi contenenti ognuno *due*, dei quattro oggetti dati, e questi gruppi devono diversifica-

1. Qui il termine «*gruppo*» è sinonimo di «*insieme*» o «*raggruppamento*».

re fra loro o almeno per un oggetto; oppure possono contenere gli stessi oggetti purché siano scritti in ordine diverso. Questi gruppi evidentemente, si ottengono dai gruppi (1), cioè dalle disposizioni a 1 a 1, aggiungendo di seguito ad ognuno di questi gruppi, uno alla volta, i tre oggetti che mancano nel gruppo stesso.

- Si vede così che ogni disposizione a 1 a 1 dà origine a tre disposizioni a 2 a 2; perciò in totale avremo $4 \cdot 3 = 12$ disposizioni a 2 a 2.

Esse sono le seguenti:

$$(2) \qquad \begin{matrix} a_1a_2 & a_2a_1 & a_3a_1 & a_4a_1 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3a_2 & a_4a_2 \\ a_1a_4 & a_2a_4 & a_3a_4 & a_4a_3. \end{matrix}$$

Come si vede, ognuno di questi gruppi contiene due oggetti, e due gruppi, come ad esempio: $a_1a_2$, $a_1a_3$, differiscono fra loro per un oggetto, oppure, come i due gruppi $a_1a_2$, $a_2a_1$ differiscono fra loro solo per l'ordine.

- Se vogliamo ora le disposizioni a 3 a 3, basterà in ognuno dei gruppi (2) aggiungere di seguito, uno alla volta, i due oggetti che non entrano nel gruppo che si considera. Quindi ogni gruppo (2) dà origine a **due** disposizioni a 3 a 3; perciò in totale avremo $12 \cdot 2 = 24$ disposizioni a 3 a 3. Esse sono le seguenti:

$$(3) \qquad \begin{matrix} a_1a_2a_3 & a_1a_2a_4 & a_2a_1a_3 & a_2a_1a_4 & a_3a_1a_2 & a_3a_1a_4 \\ a_1a_3a_2 & a_1a_3a_4 & a_2a_3a_1 & a_2a_3a_4 & a_3a_2a_1 & a_3a_2a_4 \\ a_1a_4a_2 & a_1a_4a_3 & a_2a_4a_1 & a_2a_4a_3 & a_3a_4a_1 & a_3a_4a_2 \\ a_4a_1a_2 & a_4a_1a_3 & a_4a_2a_1 & a_4a_2a_3 & a_4a_3a_1 & a_4a_3a_2. \end{matrix}$$

- Per avere infine le disposizioni a 4 a 4, basterà ad ogni gruppo (3) aggiungere di seguito l'oggetto che manca nel gruppo considerato.

Si ottiene:

$$(4) \qquad \begin{matrix} a_1a_2a_3a_4 & a_1a_2a_4a_3 & a_2a_1a_3a_4 & a_2a_1a_4a_3 & a_3a_1a_2a_4 & a_3a_1a_2a_4 \\ a_1a_3a_4a_2 & a_2a_3a_1a_4 & a_2a_3a_4a_1 & a_3a_2a_1a_4 & a_1a_4a_2a_3 & a_1a_4a_3a_2 \\ a_2a_4a_1a_3 & a_2a_4a_3a_1 & a_3a_4a_1a_2 & a_3a_1a_4a_2 & a_4a_1a_2a_3 & a_4a_1a_3a_2 \\ a_3a_2a_4a_1 & a_4a_2a_1a_3 & a_4a_2a_3a_1 & a_3a_4a_2a_1 & a_4a_3a_1a_2 & a_4a_3a_2a_1. \end{matrix}$$

Con lo stesso procedimento ora usato si potranno costruire le disposizioni, delle diverse classi, di un numero qualunque di oggetti.

Il numero delle disposizioni semplici che si possono fare con $n$ oggetti presi a $k$ a $k$, lo indicheremo con il simbolo $D_{n,k}$, da leggersi «*numero delle disposizioni semplici di n oggetti presi a k a k*».

Nei casi precedenti, rispettivamente, si ha:

$$D_{4,1} = 4; \quad D_{4,2} = 12; \quad D_{4,3} = 24; \quad D_{4,4} = 24.$$

Vogliamo ora, in generale, determinare quanto vale $D_{n,k}$, qualunque sia $n$ e con $k \leq n$.

A tale scopo vale il seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare.

**TEOREMA**

Il numero delle disposizioni semplici di $n$ oggetti della classe $k$ è uguale al prodotto di $k$ numeri interi consecutivi decrescenti di cui il primo è $n$; *cioè*:

$$(5) \qquad D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1).$$

**ESEMPI**

1. *Si ha:*

$$D_{7,3} = 7 \times 6 \times 5 = 210; \quad D_{5,4} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120; \quad D_{9,4} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024.$$

2. *Con sette giocatori di calcio, quante linee di attacco diverse si possono formare?*
Evidentemente le linee di attacco fra loro diverse che si possono formare con sette giocatori sono tante quante sono le disposizioni di 7 oggetti di classe 5; cioè:

$$D_{7,5} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520.$$

Con sette giocatori si possono quindi formare 2520 linee di attacco, fra loro diverse.

3. *In quanti modi diversi tre persone possono occupare tre di quattro posti numerati?*
Evidentemente in tanti modi quante sono le disposizioni che si possono fare con 4 oggetti presi a 3 a 3; e cioè:

$$D_{4,3} = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

## Permutazioni semplici di *n* oggetti

**DEFINIZIONE**
Si chiamano **permutazioni semplici** di n oggetti distinti, le disposizioni semplici degli *n* oggetti presi ad *n* ad *n*.

In altre parole possiamo anche dire:

*le permutazioni di n oggetti distinti sono tutti i gruppi formati ciascuno da tutti gli n oggetti dati e che differiscono fra loro soltanto per l'ordine degli oggetti.*

Ad esempio, le permutazioni dei quattro oggetti: $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, sono i gruppi dati dal quadro (4), scritto precedentemente.

Indicando con $P_n$ il numero delle permutazioni di $n$ oggetti, si ha, per *definizione*:

$$P_n = D_{n,n},$$

e quindi, per la (5), ponendo $k = n$, si ottiene:

$$P_n = n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1, \quad \text{cioè :} \quad P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n.$$

Possiamo quindi dire:

*il numero delle permutazioni semplici di n oggetti distinti è uguale al prodotto dei primi n numeri naturali.*

Si dà la seguente:

**DEFINIZIONE**
Se $k$ è un numero naturale maggiore di uno, si chiama **fattoriale** del numero $k$, e si indica con $k!$, il numero che risulta prodotto dei primi $k$ numeri naturali, a partire da 1, *cioè*:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (k-1) \cdot k.$$

Se poi è $k = 1$, oppure $k = 0$, si pone, pure per *definizione*:

$$1! = 1, \quad 0! = 1.$$

*Così ad esempio*, si ha:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120; \qquad 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

In base a questa definizione possiamo anche dire:

*il numero delle permutazioni di $n$ oggetti distinti è dato dal fattoriale del numero $n$; cioè: $P_n = n!$*

**ESEMPI**

1. *Quanti numeri di tre cifre, fra loro diversi, si possono formare con le cifre* 2, 5, 7?
   Tanti quante sono le permutazioni che si possono fare con le tre cifre date; cioè:
   $$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$
2. Sono permutazioni i cosiddetti **anagrammi**, cioè le parole che si ottengono da una parola qualunque, mutando solo il posto delle sue lettere. Bisognerà, s'intende, qui limitarsi a considerare parole formate da lettere tutte diverse.
   Così, tutti gli anagrammi (prescindendo dal significato delle parole ottenute) che si possono formare con la parola «*Roma*», sono in numero di:
   $$P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

## Combinazioni semplici di *n* oggetti

**DEFINIZIONE**

Si chiamano **combinazioni semplici** di $n$ oggetti distinti, presi a $k$ a $k$, o della classe $k (k \leq n)$, tutti i gruppi di $k$ oggetti che si possono formare con gli $n$ oggetti dati, in modo che i gruppi differiscano tra loro almeno per un oggetto.

Si vede quindi che, mentre nelle disposizioni di classe $k$, si considerano come distinti due gruppi sia che differiscano per qualche oggetto sia che differiscano soltanto per l'ordine in cui sono disposti gli oggetti stessi, nelle combinazioni invece due gruppi si considerano distinti *solo quando* essi differiscono per almeno un oggetto.

Ne segue che le combinazioni di classe $k$ costituiscono una parte delle disposizioni della stessa classe. Così, per costruire le combinazioni di $n$ oggetti della classe $k$, si possono prima costruire le disposizioni, fatte con gli stessi elementi e della stessa classe, e poi da queste tirar fuori soltanto quei gruppi che differiscono fra loro almeno per un oggetto, e si hanno così le combinazioni.

*Ad esempio*, i quattro elementi $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, danno origine alle seguenti *sei* combinazioni a due a due:

$$a_1a_2, \quad a_1a_3, \quad a_1a_4, \quad a_2a_3, \quad a_2a_4, \quad a_3a_4;$$

alle seguenti *quattro* combinazioni a tre a tre:

$$a_1a_2a_3, \quad a_1a_2a_4, \quad a_1a_3a_4, \quad a_2a_3a_4;$$

e alla seguente combinazione a quattro a quattro:

$$a_1a_2a_3a_4.$$

Proponiamoci ora di calcolare il numero delle combinazioni semplici di $n$ oggetti presi a $k$ a $k$, numero che indicheremo con il simbolo $C_{n,\,k}$, che si legge: «*il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k*».
A tale scopo, si può dimostrare il seguente:

**TEOREMA**

Il numero delle combinazioni semplici di $n$ oggetti distinti della classe $k$ è dato da una frazione che ha per numeratore il prodotto di $k$ numeri interi consecutivi decrescenti, il cui primo è $n$, e per denominatore il fattoriale di $k$; cioè:

$$C_{n,\,k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \; = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Il numero $C_{n,\,k}$, necessariamente intero, si indica spesso con la scrittura $\binom{n}{k}$, che si legge «*n sopra k*».
Abbiamo così:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}.$$

**ESEMPI**

1. *Si ha*:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10; \quad \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84; \quad \binom{7}{5} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 21.$$

2. *Quante sono le «cinquine» che si possono formare con i 90 numeri del Lotto*?

Evidentemente sono tante quante sono le combinazioni che si possono fare con i 90 numeri presi a 5 a 5; cioè:

$$\binom{90}{5} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \boxed{43949268 \text{ cinquine.}}$$

Vogliamo, infine, dimostrare la seguente proprietà delle combinazioni.
*Il numero delle combinazioni di n oggetti distinti della classe k è uguale al numero delle combinazioni di n oggetti della classe n − k; cioè*:

(6) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Infatti, scelta una combinazione della classe $k$, gli $n-k$ oggetti restanti formano una combinazione di classe $n-k$. Si vede così come ad ogni combinazione di classe $k$ formata con gli $n$ oggetti dati, si può far corrispondere una e una sola combinazione di classe $n-k$, formata con gli stessi oggetti, e viceversa. Vale perciò la (6).

OSSERVA

La formula (6) vale anche per $k = 0$, purché si **convenga** che il simbolo $\binom{n}{0}$ rappresenti l'unità.

Perciò, qualunque sia l'intero positivo $n$, porremo per *definizione*: $\binom{n}{0} = 1$.

## Formula del binomio di Newton

Se $a$ e $b$ sono numeri qualunque, sono note le formule elementari:

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ecc.

Ci proponiamo di sviluppare la potenza $(a+b)^n$, con $n$ intero positivo.
La risposta è formata dal seguente teorema che esprime la *formula detta di* TARTAGLIA-NEWTON, oppure **formula del binomio di** NEWTON.

**TEOREMA**

Qualunque siano i due numeri $a$ **e** $b$ **e l'intero positivo** $n$**, si ha:**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n, \qquad (7)$$

cioè: lo sviluppo di $(a+b)^n$ è un polinomio omogeneo di grado $n$ nel complesso delle variabili $a$ e $b$ che, ordinato secondo le potenze decrescenti di $a$ (e quindi crescenti di $b$), ha i coefficienti numerici:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad \ldots, \quad \binom{n}{k}, \quad \ldots, \quad \binom{n}{n-1}, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Abbiamo, per definizione:

$$(8) \qquad (a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ volte}}.$$

Il prodotto del secondo membro della (8), come è noto, si esegue nel modo seguente: si sceglie un termine qualunque in ciascuno degli $n$ binomi fattori e si fa il prodotto degli $n$ numeri scelti; poi si sommano tutti i prodotti possibili ottenuti nel modo indicato. Disponiamo gli $n$ fattori di uno di questi prodotti nel loro allineamento naturale, e sia:

$$aabbb\ldots ab\ldots ba,$$

l'allineamento ottenuto; sia $k$ il numero dei fattori $b$ e, quindi, $n-k$ il numero dei fattori $a$; questo prodotto ha la forma:

$$a^{n-k}b^k.$$

Quanti saranno i prodotti di questa forma? Evidentemente tanti quante saranno le combinazioni a $k$ a $k$ degli $n$ binomi del prodotto (8), cioè $\binom{n}{k}$.

Poiché $b$ può essere scelto $k$ volte, con $k = 0, 1, 2, ..., n$, si ottiene lo sviluppo enunciato nel teorema.

La (7) si può scrivere nella forma concisa:

$$(a+b)^n = \sum_{0}^{n}{}_k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

dove il simbolo $\sum_{0}^{n}{}_k$ (che si legge: «*sommatoria per k che va da zero a n*») indica che si deve fare la somma di tutti i termini che si ottengono dal termine generale $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, ponendo, successivamente $k = 0, 1, 2, .., n$.

Resta, così, chiarito perché i coefficienti numerici:

$$\binom{n}{0}, \quad \binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad ..., \quad \binom{n}{n-1}, \quad \binom{n}{n},$$

si chiamano anche «**coefficienti binomiali**».

Per avere lo sviluppo di $(a-b)^n$, basta cambiare nella (7) $b$ con $-b$.

Inoltre, i termini della (7), nei quali l'esponente di $b$ è pari, conservano il proprio segno, mentre quelli in cui detto esponente è dispari, cambiano di segno.

Si ha così:

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \\ + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 + ... + (-1)^n b^n. \tag{9}$$

**ESEMPI**

**1.** *Si ha*:

$$(x+y)^6 = \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5y + \binom{6}{2}x^4y^2 + \binom{6}{3}x^3y^3 + \binom{6}{4}x^2y^4 + \binom{6}{5}xy^5 + \binom{6}{6}y^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

**2.** *Si ha*:

$$(2x+3y)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^4(3y) + \binom{5}{2}(2x)^3(3y)^2 +$$
$$+ \binom{5}{3}(2x)^2(3y)^3 + \binom{5}{4}(2x)(3y)^4 + \binom{5}{5}(3y)^5 =$$
$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1\,080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5.$$

**3.** $$(3x-2y)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4 - \binom{4}{1}(3x)^3(2y) + \binom{4}{2}(3x)^2(2y)^2 - \binom{4}{3}(3x)(2y)^3 + \binom{4}{4}(2y)^4 =$$
$$= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4.$$

4. In particolare dalla (7) e dalla (9), si ha:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + x^n = \sum_0^n {}_k \binom{n}{k} x^k.$$

$$(1-x)^n = 1 - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \ldots + (-1)^n x^n = \sum_0^n {}_k (-1)^k \binom{n}{k} x^k.$$

5. Ponendo nella (7) e nella (9) $a = b = 1$, si ottengono due notevoli relazioni:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}; \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$

## OSSERVA

Sulla formula (7) facciamo alcune osservazioni utili nelle applicazioni:

1. *Il numero degli addendi, nel secondo membro della (7) è, evidentemente,* $n+1$.
2. *In questi addendi, gli esponenti della lettera «a» vanno diminuendo di una unità nel passaggio da uno qualunque al successivo, a partire dal primo addendo* $a^n$*; mentre gli esponenti della lettera «b» vanno sempre aumentando di una unità, nel suddetto passaggio, fino all'ultimo addendo* $b^n$.
3. *I coefficienti dei termini estremi e i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono fra loro uguali.*

   E questo perché, come sappiamo [formula (6)]: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

   In particolare: il primo coefficiente e l'ultimo sono uguali a 1; il secondo coefficiente e il penultimo sono eguali all'esponente $n$.
4. *Il coefficiente di ogni altro termine dello sviluppo (7), a partire dal terzo, si ottiene moltiplicando il coefficiente del termine precedente per l'esponente che in esso ha la lettera «a», e dividendo il risultato ottenuto per l'esponente della lettera «b» aumentato di una unità.*

   Infatti, due termini consecutivi dello sviluppo (7) sono del tipo:

   $$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \qquad \binom{n}{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1},$$

   e, come si potrebbe dimostrare, risulta: $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \dfrac{n-k}{k+1}$.

   Ciò prova l'affermazione fatta.

## ESEMPIO

*Calcolare la potenza*: $(a+b)^9$.

Tenendo presenti le osservazioni fatte si ha:

$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + \frac{9 \cdot 8}{2} a^7b^2 + \frac{36 \cdot 7}{3} a^6b^3 + \frac{84 \cdot 6}{4} a^5b^4 + 126a^4b^5 +$$

$$+ 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9 =$$

$$= a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 +$$

$$+ 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9.$$

## Esercizi svolti

**1.** *Determinare in quanti modi diversi 8 persone possono occupare i 6 posti di uno scompartimento ferroviario di prima classe.*

Disposizione

I posti possono essere occupati da gruppi che differiscono per almeno una persona (una persona occupa infatti un solo posto) oppure dal medesimo gruppo in modo diverso. Allora, come possiamo notare, l'ordine conta, sicché si tratta di fare le disposizioni (semplici) di 8 elementi di classe 6.

Pertanto i modi possibili in cui le 8 persone possono occupare i 6 posti sono:

$$D_{8,6} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20.160.$$

**2.** *Determinare quanti numeri di tre cifre, fra loro diversi, le cui cifre non si ripetono, si possono formare con i numeri 3, 5 e 7.*

Permutazione

Gli elementi sono tre fra loro distinti; si vogliono formare gruppi di tre cifre e non si vogliono ripetizioni.

Si tratta allora delle permutazioni dei tre elementi:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Infatti i sei numeri distinti sono: 357, 375, 537, 573, 735 e 753.

**3.** *Determinare il numero delle quaterne che si possono formare coi 90 numeri del lotto.*

Combinazione

Osserviamo che, ai fini del gioco del lotto, per esempio dire quaterna 30, 44, 7, 16 oppure quaterna 7, 16, 30, 44 non cambia, ciò vuol dire che l'ordine non conta e che due gruppi si considerano diversi, solamente in quanto differiscano per un elemento almeno. Allora, tenendo conto del fatto che i 90 numeri del lotto costituiscono elementi distinti, ne segue che il numero delle quaterne che si possono formare con i 90 numeri è dato dalle combinazioni semplici di 90 elementi presi 4 per volta. Cioè:

$$C_{90,4} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,555\,190.$$

**4.** *Sviluppare la seguente potenza:* $\left(2 + \frac{1}{x}\right)^4$.

Utilizzando i coefficienti binomiali e la formula di NEWTON, possiamo scrivere:

$$\left(2+\frac{1}{x}\right)^4 = \binom{4}{0}2^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{4}{1}2^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{4}{2}2^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{4}{3}2^1 \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{4}{4}2^0\left(\frac{1}{x}\right)^4 = \frac{\cancel{4!}}{0!\cancel{(4-0)!}}16 + \frac{4!}{1!(4-1)!}8 \cdot \frac{1}{x} + \frac{4!}{2!(4-2)!}4 \cdot \frac{1}{x^2} +$$

$$+ \frac{4!}{3!(4-3)!}2 \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!}(4-4)!}\frac{1}{x^4} = 16 + \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}}\frac{8}{x} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\cancel{2!}} \cdot \frac{4}{x^2} + \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}}\frac{2}{x^3} +$$

$$+ \frac{1}{x^4} = 16 + \frac{32}{x} + \frac{24}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{1}{x^4}.$$

# Esercizi proposti

## Disposizioni semplici

1. Calcolare:
$D_{8,5}$; $D_{7,3}$; $D_{10,4}$; $D_{9,3}$. [6720; 210; 5040; 504]

2. Verificare le seguenti identità:
**a)** $(n+1)\cdot D_{n,k-1}=D_{n+1,k}$.
**b)** $n\cdot D_{n-1,k}=(n-k)\cdot D_{n,k}$.
**c)** $(n-k)\cdot D_{n,k-1}=D_{n,k}-D_{n,k-1}$.
**d)** $D_{n,1}\cdot D_{n-1,1}\cdot D_{n-2,2}=D_{n,4}$.
**e)** $D_{n,4}\cdot D_{n-4,3}=D_{n,7}$.
**f)** $D_{8,6}=D_{7,6}+6\cdot D_{7,5}$.
**g)** $D_{n,k}=D_{n-1,k}+k\cdot D_{n-1,k-1}$.
**h)** $D_{n,k}\cdot D_{n-k,m}=D_{n,k+m}$.

3. Risolvere le seguenti equazioni:
**a)** $D_{x,2}=6$. [$x=3$]
**b)** $5!\,D_{x,3}=7!\,x$. [$x=8$]
**c)** $D_{x,3}=60$. [$x=5$]
**d)** $D_{x,3}=0$. [*Impossibile*]
**e)** $D_{x,3}=2\cdot D_{x-1,3}$. [$x=6$]
**f)** $D_{x,3}-384=D_{x-2,3}$. [$x=10$]

4. Quanti numeri di due cifre diverse si possono formare con i numeri 1, 3, 5, 7, 9? [20]

5. Con i numeri 3, 4, 5, 6, 7, 8 quanti numeri di tre cifre diverse, ma che cominciano per 4, si possono formare? [20]

6. Quanti numeri di tre cifre significative si possono formare con le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 6? [100]

7. Quante bandiere tricolori si possono formare con i sette colori dell'iride? [210]

## Permutazioni

8. Calcolare:
$P_7$, $P_8$, $P_9$, $P_{10}$. [5 040; 40 320; 362 880; 3 628 800]

9. Verificare le seguenti identità:
**a)** $P_5=5\cdot D_{4,3}$.
**b)** $2P_5-P_4=P_5+4P_4$.
**c)** $P_6=12\cdot D_{5,3}$.
**d)** $10!=6!\cdot D_{10,4}$.
**e)** $P_n-n\cdot P_{n-1}=0$.
**f)** $P_n^2=(P_{n+1}-P_n)\cdot P_{n-1}$.
**g)** $P_n=n\cdot D_{n-1,\,n-2}$.
**h)** $P_n=D_{n,k-1}\cdot P_{n-k+1}$.
**i)** $P_n+P_{n-1}=(n^2-1)\cdot P_{n-2}$.
**l)** $P_7\cdot D_{10,3}=P_{10}$.
**m)** $P_n(P_{n+2}-P_{n+1})=(P_{n+1})^2$.
**n)** $n\cdot P_{n-2}-(n-3)\cdot(P_{n-4}+P_{n-3})=P_{n-1}$.

**10.** Risolvere le seguenti equazioni:

a) $P_x = P_{x-1} + 96$. [$x = 5$]

b) $P_x - 42P_{x-2} = 0$. [$x = 7$]

c) $P_5 - D_{x,2} = 5 \cdot P_3$. [$x = 10$]

d) $P_{x-1} - P_{x-2} = 0$.

**11.** In quanti modi diversi possono sedere 6 commensali intorno ad una tavola rotonda?

**12.** In quanti modi si possono mescolare le 40 carte di un mazzo? [$8,15\,915 \cdot 10^{47}$]

**13.** Quanti anagrammi si possono formare con le lettere della parola «*Udine*»? [120]

**14.** Quanti anagrammi si possono formare con le parole «*Eva*», «*ramo*»?

## Combinazioni

**15.** Calcolare:

$C_{5,2}$; $C_{7,2}$; $C_{10,\,3}$; $C_{12,4}$; $C_{20,10}$. [10; 21; 120; 495; 184 756]

**16.** Verificare le seguenti identità:

a) $2C_{n,2} = n^2 - C_{n,1}$.

b) $C_{n+1,2} = n^2 - C_{n,2}$.

c) $C_{n,k+1} = \dfrac{n}{k+1} \cdot C_{n-1,k}$.

d) $6C_{8,6} = 8C_{7,5}$.

e) $4C_{n+1,3} + C_{n+2,3} = n^3 - C_{n,3}$.

f) $5C_{n,5} + 4C_{n,4} = nC_{n,4}$.

**17.** Risolvere le seguenti equazioni:

a) $C_{x,4} = 6 \cdot C_{x,2}$. [$x = 11$]

b) $C_{x,6} = 7 \cdot C_{x,4}$. [$x = 19$]

c) $10C_{x,5} = 21C_{x,3}$. [$x = 10$]

d) $C_{8,4} = (x-1)C_{8,3}$. [*Impossibile*]

**18.** Quante diagonali ha un poligono di $n$ lati? $\left[C_{n,2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}\right]$

**19.** Dati quattro punti su un piano, a tre a tre non allineati, dire quanti triangoli si possono formare con i vertici in detti punti. [4]

## Coefficienti binomiali

**20.** Calcolare:

$$\binom{16}{3},\quad \binom{12}{4},\quad \binom{15}{5},\quad \binom{8}{5},\quad \binom{9}{7},\quad \binom{10}{6}.$$

[560; 495; 3003; 56; 36; 210]

**21.** *Risolvere le seguenti equazioni:*

a) $\binom{x}{2} = 21.$ $[x = 7]$

b) $3\binom{x}{3} = 2\binom{x}{4}.$ $[x = 9]$

c) $3\binom{x}{3} - 4x = \binom{x}{2}.$ $[x = 5]$

d) $\binom{x+1}{3} = 4x.$ $[x = 5]$

e) $6 \cdot \binom{x}{5} = \binom{x+2}{5}.$ $[x = 7]$

f) $\binom{x}{6} = 28 \cdot \binom{x-1}{7}.$ $[x = 8]$

g) $\binom{x+1}{4} - \binom{x}{3} = \frac{3}{2} \cdot \binom{x-1}{3}.$ $[x = 6]$

h) $\binom{x-1}{2} + \binom{x-1}{3} = \binom{x}{3}.$ [*Indeterminata*]

## Binomio di Newton

**22.** Mediante la formula del binomio di Newton, sviluppare le seguenti potenze:

$(a+b)^6$; $(a+b)^{12}$; $(x-y)^7$; $(1+x)^9$; $(1-x)^5$; $(x+3y)^5$; $(2a-b)^7$;

$(2x-1)^4$; $\left(a+\frac{1}{a}\right)^5$; $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\right)^4$; $\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^5$;

$\left(3a+\frac{2}{3}y\right)^7$; $\left(1-\frac{a}{2}\right)^5$; $(2a^2-3ab)^4$; $(4ax^2-b^2)^6$; $(5ab-x^3)^7$;

$\left(\frac{1}{3}x^3y-2xy^3\right)^6$; $(3+4xy^2)^6$.

**23.** Eseguire le operazioni indicate nelle seguenti espressioni:

**a)** $(x+y)^4-(x-y)^4$.

**b)** $(2x-y)^4+(x+3y)^4-6x^3y+8x^2y^2$.

**c)** $(1+2a)^4+2(1+2a)^3(1-2a)^3+(1-2a)^6$.

**d)** $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^5-\left(2a-\frac{1}{3}b\right)^5+\frac{8}{3}a^4b-6a^2b^3$.

**e)** $(a+1)^3-3(a+1)^2(a-1)+3(a+1)(a-1)^2-(a-1)^3$.

**f)** $[(x-2y)+(a+3b)]^4$.

**g)** $[(4x^4-3y^2)(4x^4+3y^2)]^4$.

**24.** Calcolare il 4° termine dello sviluppo di $(2x-3y)^6$. $[-4\,320x^3y^3]$

**25.** Calcolare il 5° termine dello sviluppo di $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}\right)^7$. $\left[\frac{70}{81}a^3\right]$

**26.** Calcolare il *penultimo* termine dello sviluppo di $\left(2a^3b - \frac{1}{2}b^4\right)^8$. $\left[-\frac{1}{8}a^3b^{29}\right]$

**27.** Calcolare il 7° termine dello sviluppo di $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$.

**28.** Calcolare il coefficiente di $x^9$ nello sviluppo di $(5a^3 - 4x^3)^7$.

**29.** Qual è il termine medio nello sviluppo di $(2x^2 - 3xy)^{10}$?

## Esercizi vari

**30.** In quanti modi distinti si possono sistemare 7 persone in una fila di 10 poltrone? $[D_{10,7} = 604\,800]$

**31.** Quante linee d'attacco di 5 giocatori ciascuna, si possono formare con 8 giocatori? [6 720]

**32.** Quante linee d'attacco di 5 giocatori ciascuna si possono formare con 8 calciatori, tenendo fissa l'ala destra? [840]

**33.** Dati cinque numeri distinti, quanti «*ambi*» e quante «*terne*» si possono formare con essi? [10; 10]

**34.** Un barman dispone di trenta tipi diversi di liquori. Prendendone tre per volta quanti cocktails diversi potrà preparare? [4 060]

**35.** Quante cinquine che cominciano con un numero prefissato si possono formare con i 90 numeri del lotto? [2 441 626]

**36.** Quante sono le cinquine che contengono un determinato terno? $[C_{87,2} = 3\,741]$

**37.** Quante sono le cinquine che contengono una determinata quaterna? $[C_{86,1} = 86]$

**38.** Quante sono le cinquine che contengono il 90? $[C_{89,4} = 2\,441\,626]$

**39.** Dati 10 punti di un piano, tre dei quali non risultano mai allineati, quante rette si possono tracciare congiungendo i punti a due a due? [45]

**40.** Quanti triangoli si possono formare con 5 punti di un piano, tre dei quali non siano mai allineati? [10]

**41.** Generalizzare il problema precedente, supponendo che i punti siano $n (n \geq 3)$, a tre a tre non allineati. $\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right]$

**42.** In un'urna ci sono 20 palline, numerate dall'1 al 20. Cinque di queste sono bianche, mentre le altre sono di altro colore. Quante quaterne distinte si possono estrarre in modo che in ognuna di esse ci sia *almeno* una pallina bianca? $[C_{20,4} - C_{15,4} = 3\,480]$

**43.** Avendo la stessa urna del precedente esercizio, quante quaterne distinte si possono estrarre in modo che in ognuna di esse ci sia *soltanto* una pallina bianca? [$5C_{15,3} = 2\,275$]

**44.** In quanti modi 3 ragazzi e 2 ragazze possono mettersi in fila? In quanti modi possono mettersi in fila se i ragazzi vogliono mettersi l'uno di seguito all'altro e così pure le ragazze? In quanti modi possono mettersi in fila se solo le ragazze vogliono mettersi l'una di seguito all'altra? [120; 24; 48]

**45.** In quanti modi si possono mettere in fila 3 Italiani, 4 Francesi, 4 Inglesi e 2 Olandesi, facendo in modo che quelli della stessa nazionalità siano uno di seguito all'altro? Risolvere lo stesso problema, nel caso che debbano sedersi a una tavola rotonda.
[$4! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2! = 165\,888$; $3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2! = 41\,472$]

**46.** Determinare il numero degli anagrammi che si possono ottenere con la parola «*notte*».
[$P_5 : P_2 = 60$]

**47.** Sapendo che il numero delle combinazioni di $n$ oggetti a 4 a 4 è sestuplo di quello delle combinazioni degli stessi oggetti a 2 a 2, trovare $n$.
[$n = 11$]

**48.** Date nel piano $n$ circonferenze, ciascuna delle quali sia esterna a tutte le altre, determinare il numero complessivo delle rette tangenti a tutte le possibili coppie di circonferenze.
[$4C_{n,2} = 2n(n-1)$]

**49.** Se il numero delle combinazioni di $n$ oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3, quanto vale $n$? [$n = 7$]

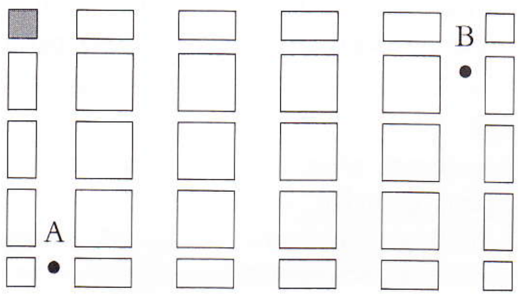
**50.** Sviluppare e ordinare:

$$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^6; \qquad (x^2 - x\sqrt{2})^5; \qquad (x\sqrt{3} - 1)^8.$$

**51.** Scrivere $(1 + 2\sqrt{2})^5$, $(3\sqrt{2} - 1)^7$, $\left(5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^4$, sotto la forma $a + b\sqrt{2}$, dove $a$ e $b$ sono numeri *razionali*.

**52.** Scrivere $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^6$, sotto la forma $a + b\sqrt{6}$, con $a$ e $b$ numeri *interi*. [$485 + 198\sqrt{6}$]

**53.** Devo spostarmi da $A$ a $B$. Quanti sono i possibili cammini?




[35]