TFA A047 28 Agosto 2012 PADOVA | Tempo $2h\frac{1}{2}$ |

1) Dire cosa significa che una funzione reale è soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2}{x^2+1}.$$

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{x^2+1} & (1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

specificando qual'è l'intervallo massimale in cui è definita la soluzione.

Enunciare una versione del teorema di esistenza e univocità locale per il problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Spiegare perchè in (1) sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale.

2) Dare la definizione di applicazione lineare φ tra due generatrici spazi vettoriali V e W di dimensione finita sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. Definire nucleo e rango di φ.

Enunciare il teorema di Rouché-Capelli (o del rango) per un sistema lineare $Ax = b$ dove $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Calcolare, al variare del parametro t, la controimmagine (o immagine inversa) del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ rispetto all'applicazione lineare di matrice $\begin{pmatrix} t & 1-t & 2t-4 \\ t & t-1 & t-2 \\ -2t & t-1 & 2-t \end{pmatrix}$ nella base canonica $\mathbb{R}^3$.

3) Considerare la variabile aleatoria con densità di probabilità

$$(2) \qquad f(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dove x è la variabile indipendente, mentre μ e σ sono da considerare parametri. Calcolare i punti di flesso della funzione $f(x \mid \mu, \sigma)$ nella variabile x. Si ponga $\phi(y) = P(N(0,1) \leq y) =$

$$= \int_{-\infty}^{y} f(x \mid 0,1)\, dx$$

e si assuma che il livello di glucosio a digiuno in un gruppo di pazienti non diabetici si distribuisca secondo la densità di probabilità (2) con $\mu = 98\, mg/100\, ml$ e $\sigma = \frac{8 mg}{100 ml}$.

Dati per noti i valori di ϕ, si determino le probabilità:

a) che ~~è~~ un paziente non diabetico presenti un livello di glucosio a digiuno minore di $82\, mg/100\, ml$;

b) che un paziente non diabetico presenti un livello di glucosio a digiuno compreso tra $\frac{90\, mg}{100\, ml}$ e $\frac{106\, mg}{100\, ml}$;

c) che un paziente non diabetico presenti un livello di glucosio a digiuno maggiore di $114\, mg/100\, ml$.

4) Nel piano reale $\mathbb{R}^2$ si consideri, al variare di a e $b \in \mathbb{R}$, la conica di equazione $C_{a,b} : x^2 + ay^2 + bx - 2y + 1 = 0$. Si determini per quali valori di a e b la curva $C_{a,b}$ è una parabola.

In tali casi, si dimostri che essa è sempre isometrica alla curva $y^2-2x=0$ e si scrive esplicitamente una tale isometria. [Suggerimento: sono entrambe isometriche a $y=\frac{1}{2}x^2$].

Supposto che sia $0<a<1$, si consideri il gruppo $G_{a,b}$ delle simmetrie della conica $C_{a,b}$. Qual'è il suo ordine? Di che ordine sono i suoi elementi? È abeliano? È ciclico? Dare un esempio di poligono convesso che ha gruppo di simmetria isomorfo $G_{a,b}$.

Descrivere il gruppo di simmetria di una circonferenza.

5) Quando un insieme ha la cardinalità del numerabile? Quando un insieme ha la cardinalità del continuo? Calcolare la cardinalità dell'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ costituito da tutte le funzioni reali di variabile reale definite su tutto $\mathbb{R}$. Qual'è la cardinalità dell'insieme C costituito dalle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (definite su tutto $\mathbb{R}$)? [Suggerimento: si confronti C con l'insieme $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$ costituito da tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ verso $\mathbb{Q}$, dove $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali].

Si provi che se h e K sono due cardinali con

$$2\leq h\leq K \text{ e } K \text{ infinito, allora } h^K=2^K$$

(dove l'esponenziazione è intesa in senso cardinale).